CORRESPONDANCE
SUR
L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Rédigée par M. Hachette.

N°. 10. *Avril* 1808.

§. I.

MÉCANIQUE.

Note sur différentes propriétés des projections.

Par M. Poisson.

La projection de l'aire d'une courbe plane sur un autre plan, est égale à cette aire multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans; ainsi en appelant a l'aire que l'on considère, b sa projection, et c l'angle des deux plans, on aura

$$b = a \cos c.$$

Soient de même p, p', p'', les projections de a sur trois plans rectangulaires; q, q', q'', les inclinaisons du plan de a sur ces trois plans, et α, β, γ, les inclinaisons du plan de b sur ces trois mêmes plans, on aura d'abord

$$p = a \cos.q, \quad p' = a' \cos.q', \quad p'' = a'' \cos.q'';$$

et d'après une formule connue

$$\cos.c = \cos\alpha.\cos p + \cos\beta.\cos p' + \cos\gamma.\cos p'';$$

donc en multipliant de part et d'autre par a,

$$b = p \cos\alpha + p' \cos\beta + p'' \cos\gamma.$$

Cette formule donnera la projection de a sur un plan quelconque lorsque cette projection sera connue sur trois plans rectangulaires par rapport auxquels la position du nouveau plan sera donnée.

Maintenant si l'on considère un nombre quelconque d'aires a, a', a'', etc., situées dans des plans différens; que l'on projette ces aires sur un même plan, et que l'on désigne la somme des projections par B; que l'on désigne de même par A, A', A'' les sommes des projections des mêmes aires sur trois plans rectangulaires, on conclura sans peine de la formule précédente

$$B = A\cos.\alpha + A'\cos.\beta + A''\cos.\gamma,$$

α, β, γ étant les inclinaisons du plan de B sur les trois plans rectangulaires.

Représentons encore par B' la somme des projections des aires a, a', a'', etc., sur un plan qui fait les angles α', β', γ' avec les trois plans rectangulaires; par B'' la somme de ces aires projettées sur un plan dont α'', β'', γ'' sont les inclinaisons sur les mêmes plans rectangulaires, nous aurons

$$B' = A\cos.\alpha' + A'\cos.\beta' + A''\cos.\gamma',$$
$$B'' = A\cos\alpha'' + A'\cos.\beta'' + A''\cos.\gamma'';$$

et si les trois plans de B, B', B'' sont aussi rectangulaires, il existera entre les neuf cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, etc., les équations connues

$$\cos^2.\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2.\alpha'' = 1$$
$$\cos^2.\beta + \cos^2\beta' + \cos^2.\beta'' = 1$$
$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1$$
$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos.\beta'' = 0$$
$$\cos.\alpha\cos\gamma + \cos\alpha'\cos\gamma' + \cos\alpha''\cos\gamma'' = 0$$
$$\cos\beta\cos\gamma + \cos\beta'\cos.\gamma' + \cos.\beta''\cos.\gamma'' = 0.$$

Or, en vertu de ces relations, les trois dernières équations donneront

$$\left.\begin{aligned} A &= B\cos\alpha + B'\cos.\alpha' + B''\cos.\alpha'' \\ A' &= B\cos\beta + B'\cos.\beta' + B''\cos.\beta'' \\ A'' &= B\cos.\gamma + B'\cos.\gamma' + B''\cos.\gamma'' \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et de plus

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = B^2 + B'^2 + B''^2.$$

(*Voy*. le nº. 7 de la Correspondance, pag. 237).

Cette somme $B^2 + B'^2 + B''^2$ sera donc indépendante de la direction des trois plans de projection, et elle restera la même en passant d'un système de plans rectangulaires à un autre. Dans le cas particulier où toutes les aires a, a', a'', etc., sont dans un même plan, cette somme n'est autre chose que le carré de l'aire $a + a' + a'' +$ etc. Voyons ce qu'elle représente dans le cas général.

On a, $\quad B = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2 - B'^2 - B''^2}$;

la somme des projections B, qui varie en passant d'un plan de projection à un autre, sera donc la plus grande possible, quand on aura $B' = 0$, $B'' = 0$, et alors elle sera égale à....... $\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}$; Ainsi cette quantité constante exprime en général la plus grande somme des projections sur un même plan des aires a, a', a'', etc., que l'on considère dans l'espace. Le plan qui répond à cette plus grande projection jouit de propriétés importantes dans la mécanique; sa position est facile à déterminer d'après les équations $B' = 0$, $B'' = 0$, qui le caractérisent.

En effet, les équations (1) se réduisent alors à

$$A = B \cos \alpha, \quad A' = B \cos \alpha', \quad A'' = B \cos \alpha'';$$

or α est l'inclinaison du plan de la plus grande projection B sur le plan de A : de plus, si l'on désigne par θ l'angle que fait l'intersection de ces deux plans avec la trace du plan de A'' sur le plan de A, ces deux angles θ et α suffiront pour déterminer la position du plan de B, et il est facile de voir que l'on aura

$$\sin.\alpha.\sin.\theta = \cos \alpha', \quad \sin.\alpha.\cos.\theta = -\cos.\alpha'';$$

donc

$$\cos.\alpha = \frac{A}{B} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}$$

$$\sin.\alpha \sin.\theta = \frac{A'}{B} = \frac{A'}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}.$$

$$\sin.\alpha \cos.\theta = -\frac{A''}{B} = \frac{-A''}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}},$$

et par conséquent

$$\text{tang.}\,\theta = -\frac{A'}{A''}.$$

Lors donc que l'on connoîtra les sommes A, A', A'' des projections sur trois plans rectangulaires choisis arbitrairement, on pourra immédiatement déterminer la position du plan de la plus grande projection, au moyen des formules

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}}, \quad \text{tang}\,\theta = -\frac{A'}{A''}. \qquad (2)$$

Si l'on donne ensuite l'inclinaison δ d'un autre plan sur celui de la plus grande projection, on aura la somme D des projections sur ce nouveau plan, en multipliant $\sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}$ par $\cos\delta$, c'est-à-dire qu'on aura généralement

$$D = \sqrt{A^2 + A'^2 + A''^2}.\cos\delta\,; \qquad (3)$$

et réciproquement, cette équation fera connoître l'angle δ, quand on donnera la somme D des projections.

Les formules (2) et (3) renferment les solutions de tous les problêmes que l'on peut proposer sur les projections des aires. Appliquons maintenant à la mécanique les propriétés géométriques de ces projections que nous venons de démontrer.

Si l'on considère un systême de corps dont les masses sont m, m', m'', etc., en mouvement dans l'espace, et si l'on suppose que ces corps ne sont soumis qu'à leurs actions réciproques, dues à des attractions, à des répulsions ou à toute autre cause; la somme des aires planes décrites dans un instant infiniment petit par les rayons vecteurs de ces corps autour du centre de gravité du systême, multipliées respectivement par leurs masses, et projettées sur un même plan, reste constante pendant tout le mouvement. C'est un des principes généraux de la mécanique, connu sous le nom *de Principe de la conservation des aires*. Or on peut prendre ces aires multipliées respectivement par les masses, pour les aires que nous avons désignées plus haut par a, a', etc.; alors en représentant toujours par A, A', A'', les sommes de leurs projections sur trois plans rectangulaires choisis arbitrairement, les formules (2) détermineront par rapport à ces plans la position du plan de la plus grande projection; donc si l'on conçoit que ce plan passe par le centre de gravité et soit emporté

avec lui dans le mouvement du système, il restera toujours parallèle à lui-même, puisque les quantités A, A', A'' ne varient pas pendant ce mouvement. Il existe donc, dans tout système de corps soumis à leurs actions réciproques, un plan dont on peut déterminer la position à chaque instant, et qui jouit de la propriété remarquable d'être toujours parallèle à lui-même. Pour cette raison, on l'a nommé *Plan invariable*. Il peut servir en astronomie à reconnoître les variations des orbites planétaires et les mouvemens propres des étoiles. En général, il est naturel, dans les questions de dynamique, de le prendre pour l'un des plans coordonnés, parce qu'alors on fait évanouir deux des trois constantes introduites par le principe des aires, ce qui simplifie les équations du problême.

On appelle *moment* d'une force par rapport à un point, le produit de cette force par la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction. Si on conçoit un plan quelconque passant par ce point, que l'on projette la force sur ce plan, et qu'on abaisse du même point une perpendiculaire sur cette projection, le produit de cette perpendiculaire par la projection de la force sera le moment de la force projettée. Or on voit que le moment de la force dans l'espace et celui de la force projettée sur le plan, ne sont autre chose que deux triangles qui ont leur sommet commun au centre des momens, et pour bases la force et sa projection; et de plus l'un des triangles est évidemment la projection de l'autre. Donc si l'on a un système de forces dans l'espace, qu'on les projette toutes sur un même plan, que l'on prenne la somme des momens des forces projettées par rapport à un point de ce plan; cette somme variera en faisant tourner le plan de projection autour du centre des momens; et parmi toutes les positions du plan, il en existera une pour laquelle cette somme sera la plus grande. Pour déterminer la valeur de ce plus grand moment et le plan qui lui correspond (lequel plan seroit celui des forces du système, si elles étoient toutes dans un même plan), il suffira de connoître les sommes des momens des forces projettées sur trois plans rectangulaires choisis arbitrairement: désignant par A, A', A'' ces trois sommes, on aura $\sqrt{A^2+A'^2+A''^2}$ pour la valeur du plus grand moment, et la position de son plan sera déterminée au moyen des formules (2). La formule (3) donnera ensuite la somme D des momens par rapport au même centre, des forces projettées sur un autre plan, passant par ce centre, et faisant un angle δ avec celui du plus grand moment. Mais si l'on veut déterminer cette somme des momens sans employer l'intermédiaire du plus grand moment, on aura généralement

$$D = A \cos . \varepsilon + A' \cos \varepsilon' + A'' \cos \varepsilon'' ;$$

ε, ε', ε'' étant les inclinaisons du plan du moment D sur ceux des momens A, A', A'' ; et cette équation, jointe à l'équation (3), fait voir que la composition et la décomposition des momens s'effectuent suivant les mêmes lois que celles des forces, le plus grand moment et son plan remplaçant la résultante et sa direction.

Ces théorêmes sur le plan invariable et sur la composition des momens, sont dus à M. Laplace. En les faisant dépendre de quelques propriétés des projections, nous avons cherché à les démontrer de la manière la plus simple et la plus appropriée à l'enseignement de l'Ecole.

Conditions d'équilibre dans un systéme solide libre.

Par M. Lefebvre, *Adjoint aux repétiteurs d'analyse de l'École Impériale Polytechnique.*

Quelle que soit la forme d'un systême solide, si parmi les points d'application des forces on en prend trois, et qu'on les suppose liés invariablement par des droites, on pourra fixer chacun des autres au moyen de ses trois distances aux premiers. Le systême sera alors remplacé par une suite de pyramides qui auront pour base commune le triangle formé par les trois premiers points, et pour sommets les autres points du systême.

Cette disposition établie, la force qui sollicite un point hors de la base pourra se résoudre, au moyen du *parallélipipède des forces*, en trois autres dirigées suivant les trois arêtes de la pyramide dont il est le sommet. Quant à la force qui sollicite un point de la base, si on la remplace par deux autres, dont l'une soit égale et contraire à la résultante des composantes qui, descendant des différens sommets, viendroient s'appliquer à ce point, il faudra, dans le cas de l'équilibre, que l'autre force et celles qui résulteraient d'une semblable décomposition opérée aux autres points, se détruisent mutuellement : et, si l'on observe qu'elles doivent être dans un même plan, on pourra décomposer l'une d'elles en deux autres dirigées suivant les lignes qui aboutissent aux points sollicités par les deux autres forces. Que l'on remplace actuellement chacune de celles-ci par deux composantes, dont l'une soit égale et opposée à celle qui provient de la première, il n'en restera plus que deux qui devront se faire équilibre, c'est-à-dire, être égales et contraires.

Pour qu'il y ait équilibre dans un système solide libre, il est donc nécessaire que *les forces qui le sollicitent puissent se décomposer en d'autres égales et contraires suivant les distances mutuelles de leurs points d'application.*

Les équations qui exprimeront la possibilité d'une semblable décomposition seront donc celles de l'équilibre. Il y aura dans ce cas autant de forces à déterminer qu'il y a d'arêtes, c'est-à-dire, $3h-6$, h étant le nombre total des points soumis à des forces.

Si l'on cherche à déterminer ces forces par le calcul, le moyen le plus simple qui se présente, est de décomposer les forces données, chacune en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires. Si l'on décompose ensuite, de la même manière, celles qui sont appliquées aux mêmes points que les précédentes, mais qui sont dirigées suivant les arêtes qui aboutissent à ces points, elles devront donner trois forces rectangulaires égales à celles qui sont fournies immédiatement. Chaque point fournissant trois équations, il y en aura en tout $3h$, pour déterminer les $3h-6$ forces de l'équilibre : il restera donc 6 équations de condition.

Pour décomposer une force en trois autres parallèles à trois axes rectangulaires, on sait qu'il faut la multiplier par les cosinus des angles qu'elle fait avec ces trois axes.

Soient donc...... P, P', P'', etc., les forces appliquées aux points dont les coordonnées sont $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$, etc. Soit P décomposé en X, Y, Z; P' en X', Y', Z', etc.

Prenant les trois premiers points pour former la base des pyramides successives, désignons par

$$p',\ p'',\ p''',\ \text{etc.};\ q'',\ q''',\ \text{etc.};\ r''',\ \text{etc.},$$

les distances des points du système au 1er., au 2e., au 3e. : par

$$\varphi',\ \varphi'',\ \varphi''',\ \text{etc.};\ \chi'',\ \chi''',\ \text{etc.};\ \psi''',\ \text{etc.};$$

les forces dirigées respectivement vers ces points.

D'après cette notation les quantités affectées des mêmes accens appartiennent au même point.

Les angles formés avec les trois axes par les droites qui mesurent p', q'', r''', sont

$$\frac{x'-x}{p'},\ \frac{y'-y}{p'},\ \frac{z'-z}{p'};\ \frac{x''-x'}{q''},\ \frac{y''-y'}{q''},\ \frac{z''-z'}{q''};\ \frac{x'''-y''}{r'''},\ \frac{y'''-y''}{r'''},\ \frac{z'''-z''}{r'''}.$$

Ainsi de suite pour p'', q''', r^{IV}, etc.

D'après cela, il viendra, au 1er. point de la base,

$$X = \frac{\varphi'(x'-x)}{p'} + \frac{\varphi''(x''-x)}{p''} + \frac{\varphi'''(x'''-x)}{p'''} + \text{etc.}$$

$$Y = \frac{\varphi'(y'-y)}{p'} + \frac{\varphi''(y''-y)}{p''} + \frac{\varphi'''(y'''-y)}{p'''} + \text{etc.}$$

$$Z = \frac{\varphi'(z'-z)}{p'} + \frac{\varphi''(z''-z)}{p''} + \frac{\varphi'''(z'''-z)}{p'''} + \text{etc.}$$

Au 2e. point de la base.

$$X' = \frac{\varphi'(x-x')}{p'} + \frac{\chi''(x''-x')}{q''} + \frac{\chi'''(x'''-x')}{q'''} + \text{etc.}$$

$$Y' = \frac{\varphi'(y-y')}{p'} + \frac{\chi''(y''-y')}{q''} + \frac{\chi'''(y'''-y')}{q'''} + \text{etc.}$$

$$Z' = \frac{\varphi'(z-z')}{p'} + \frac{\chi''(z''-z')}{q''} + \frac{\chi'''(z'''-z')}{q'''} + \text{etc.}$$

Au 3e. point de la base,

$$X'' = \frac{\varphi''(x-x'')}{p''} + \frac{\chi''(x'-x'')}{q''} + \frac{\psi'''(x'''-x'')}{r'''} + \text{etc.}$$

$$Y'' = \frac{\varphi''(y-y'')}{p''} + \frac{\chi''(y'-y'')}{q''} + \frac{\psi'''(y'''-y'')}{r'''} + \text{etc.}$$

$$Z'' = \frac{\varphi''(z-z'')}{p''} + \frac{\chi''(z'-z'')}{q''} + \frac{\psi'''(z'''-z'')}{r'''} + \text{etc.}$$

Au 4e. point hors de la base.

$$X''' = \frac{\varphi'''(x-x''')}{p'''} + \frac{\chi'''(x'-x''')}{p'''} + \frac{\psi'''(x''-x''')}{r'''}$$

$$Y''' = \frac{\varphi'''(y-y''')}{p'''} + \frac{\chi'''(y'-y''')}{q'''} + \frac{\psi'''(y''-y''')}{r'''}$$

$$Z''' = \frac{\varphi'''(z-z''')}{p'''} + \frac{\chi'''(z'-z''')}{q'''} + \frac{\psi'''(z''-z''')}{r'''}$$

Au..., etc. etc. etc.

Les équations suivantes seroient de la même forme que celle-c

L'on doit observer que si φ' agit du 2[e] point vers le premier, la force, qui est égale et contraire à celle-ci, agit du 1[er]. point vers le 2[d]. En étendant cette remarque aux autres forces, l'on voit pourquoi, dans le 1[er]. groupe, on met $\frac{\varphi'(x'-x)}{p'}$, $\frac{\varphi''(x''-x)}{p''}$, etc. et dans les suivans $\frac{\varphi'(x-x')}{p'}$, $\frac{\varphi''(x-x'')}{p''}$, etc. Ainsi de suite.

L'élimination des quantités φ', φ'', etc, χ'', etc., ψ''', etc. fournira les six équations d'équilibre. Trois d'entre elles s'obtiennent sur-le-champ en ajoutant membre à membre les premières de chaque groupe, et en usant de même pour les secondes et les troisièmes. Il vient ainsi :

$$X+X'+\text{etc.}=A=0,\quad Y+Y'+\text{etc.}=B=0,$$
$$Z+Z'+\text{etc.}=C=0.$$

Si l'on forme les produits $Xy-Yx$, $X'y'-Y'x'$, etc, et qu'on ajoute, le second membre s'anéantit et l'on trouve :

$$Xy-Yx+X'y'-Y'x'+\text{etc.}=L=0,$$
$$Zx-Xz+Z'x'-X'z'+\text{etc.}=M=0,$$
$$Yz-Xy+Y'z'-Z'y'+\text{etc.}=N=0,$$

Les trois premières équations ne conservant aucune trace des coordonnées des points d'application, écrivent évidemment que *les forces du systéme doivent se faire équilibre, lorsqu'on les transporte en un méme point parallèlement à elles-mémes.*

Quant aux trois dernières, on peut les énoncer ainsi : *la somme des momens des projections des forces, sur chacun des plans coordonnés, est égale à zéro.*

On verra plus loin leur signification en mécanique.

Conditions d'équilibre dans un systéme solide fixé par un point, ou par une droite.

Quand il y a un point fixe dans un systême, il peut contribuer à établir l'équilibre. De quelque façon qu'il y contribue, il ne peut que tenir lieu d'une force égale à la résistance qu'il oppose. Si l'on introduit cette force dans les six équations d'équilibre, les trois premières auront lieu d'elles-mêmes. Les trois dernières subsisteront toujours : et, si l'on prend l'origine au

point fixe, le moment de la force appliquée à ce point sera nul. Il restera donc $L=o$, $M=o$, $N=o$ pour les conditions d'équilibre d'un système solide *autour d'un point fixe*. Ce qui fournit l'explication des trois équations des momens, lorsque le système est libre.

Si le système est fixé par une droite, on pourra la prendre pour axe des z; et quelque part que l'on mette l'origine des momens sur cet axe, l'équilibre devra subsister. Si on la transporte à une distance d, tous les z augmenteront de cette quantité. Si, de plus, on suppose appliquée à l'axe des z, à une distance f de la nouvelle origine, une force dont les composantes soient $X_{\prime}$, $Y_{\prime}$, $Z_{\prime}$, les équations des momens deviendront :

$$L=o,\quad M-(X+X'+\text{etc.})\,d-X_{\prime}f=o,$$
$$N+(Y+Y'+\text{etc.})\,d+Y_{\prime}f=o.$$

Les deux dernières font connoître l'effort que l'axe supporte au point où l'on a appliqué les forces $X_{\prime}$, $Y_{\prime}$. Si la résistance de l'axe est suffisante à ce point, comme cela doit avoir lieu lorsqu'il est fixe, les deux dernières équations ont lieu d'elles-mêmes, et il ne reste plus que $L=o$, qui signifie que *la somme des momens des projections des forces, sur un plan perpendiculaire à l'axe fixe, est égale à zéro.*

Dans l'équilibre d'un système libre, comme dans celui d'un système fixé par un point, $L=o$, $M=o$, $N=o$, écrivent donc *qu'il n'y a point de rotation autour de trois axes rectangulaires qui se croisent à l'origine des momens.*

Conclusion qui met encore mieux à découvert la signification des équations des momens.

Condition pour qu'un système de forces ait une résultante.

Lorsqu'un système solide est libre, et qu'on a formé les quantités X, Y, Z, L, M, N, si elles ne sont point nulles, l'équilibre n'existe pas; mais si les forces sont réductibles à une seule R, $-R$ devra produire l'équilibre. Si l'on désigne par a, b, c les angles que sa direction forme avec les x, les y et les z, et par l, m, n les coordonnées d'un de ses points, il viendra

$$A=R\cos a,\quad B=R\cos b,\quad C=R\cos c,$$
$$Am-Bl=L,\quad Cl-An=M,\quad Bn-Cm=N.$$

Les trois premières donnent la valeur et la direction de la résultante. Quant aux trois dernières, elles ne doivent point déterminer a, b, c, s'il y a une résultante, puisque ces quantités sont les coordonnées d'un quelconque de ses points. Elles doivent donc être les équations de la résultante. Cette condition exige que la troisième soit comportée par les deux autres. Si l'on élimine l, m entre ces trois équations, n disparoît, et il reste

$$LC + MB + NA = 0.$$

Cette équation, nécessaire pour qu'il y ait une résultante, n'est insuffisante que lorsque A, B, C sont nulles. Cela se voit par les équations entre l, m, n, qui, dans cette supposition, sont absurdes, à moins que l'on ait $L=0$, $M=0$, $N=0$; et dans ce dernier cas il y a équilibre.

C'est à M. Poinsot que l'on doit la méthode qu'on vient d'appliquer à la recherche des six équations d'équilibre ; elle est principalement remarquable par la pureté et l'élégance des considérations qu'on y emploie, et elle se trouve indiquée d'une manière claire et précise dans un mémoire qu'il a lu à l'Institut national, et qui a été inséré dans le 13e. cahier du Journal de l'École Polytechnique.

OPTIQUE.

De l'arc-en-ciel, par M. Hachette.

L'arc-en-ciel est une image circulaire et colorée du soleil, qui résulte de la décomposition de ses rayons par l'eau que l'air tenoit en dissolution et qui tombe en gouttes de pluie. Cet effet de l'eau sur la lumière est toujours accompagné de plusieurs circonstances sans lesquelles le phénomène n'auroit pas lieu ; ainsi, on ne voit l'arc-en-ciel que dans la partie de l'atmosphère où un nuage qui se résout en pluie, est éclairé par la lumière blanche du soleil ; il n'est visible que pour des spectateurs qui ne reçoivent pas l'impression de cette lumière directe.

*

D'autres circonstances rendent l'arc-en-ciel plus ou moins apparent ; un nuage opaque placé derrière la portion transparente de l'atmosphère où l'arc est formé, en fait ressortir les couleurs ; cette portion d'atmosphère ne doit pas seulement être transparente, il faut encore qu'elle ait une certaine étendue en épaisseur, sur-tout pour que l'arc-en-ciel soit visible à une grande distance.

La grandeur et la position des arcs-en-ciel dépendent de la hauteur du soleil, de la position du spectateur par rapport à cet astre, et de la figure du terrein enveloppé par les nuages.

Un arc-en-ciel dont les couleurs sont très-vives, est toujours accompagné d'un second arc, et quelquefois mais très-rarement, d'un troisième ; l'ordre des couleurs dans tous ces arcs est constant ; du rouge on passe au jaune, au bleu et au violet, en observant néanmoins que dans le premier arc, les rayons rouges sont plus inclinés à l'horison que les rayons violets, et que c'est l'inverse pour le second arc ; dans le 3e. et le 4e. arc, le 5e. et 6e., etc., les choses se passent de la même manière que dans le premier et le second.

Les couleurs du second arc sont beaucoup moins vives que celles du premier ; et le troisième arc est ordinairement si foible, qu'il est rarement visible ; *le diamètre apparent de chacun de ces arcs est constant.*

Les principales circonstances de l'arc-en-ciel étant connues, j'ai pensé qu'il ne seroit pas inutile de présenter à MM. les élèves de l'École Polytechnique, une rédaction de la théorie de cet effet de lumière, en faisant usage des méthodes de calcul et de géométrie, qui leur sont familières ; car, quoique les derniers traités de physique renferment cette théorie, il m'a semblé qu'ils laissoient encore quelque chose à desirer, et que les auteurs de ces traités avoient craint d'outrepasser la limite des connoissances mathématiques, dont on se contente ordinairement, pour étudier la physique.

Nous allons d'abord considérer la marche de la lumière du soleil dans une goutte d'eau supposée sphérique, et l'impression de cette lumière sur un spectateur qui, ne recevant pas les rayons directs du soleil, voit la goutte d'eau éclairée par cet astre.

En regardant le soleil comme un point placé à une grande distance de la terre, les rayons solaires arrivent sensiblement pa-

rallèles entre eux sur la goutte d'eau qu'ils éclairent ; ils s'y réfractent pour passer de l'air dans l'eau et de l'eau dans l'air, mais cette seconde réfraction est accompagnée d'une réflexion ; les rayons solaires étant décomposés par la première réfraction en élémens rouge, jaune, etc., ces élémens se réfléchissent dans l'intérieur de la goutte avant de repasser dans l'air ; or, d'après les lois de la réflexion et de la réfraction, un rayon solaire quelconque et les rayons colorés qui résultent de sa décomposition sont dans un plan mené par le rayon et le centre de la goutte d'eau ; donc si, par l'œil d'un spectateur, les centres du soleil et de la goutte, on mène un plan, il n'y aura que les rayons solaires tombant sur la section de la goutte sphérique par ce plan, dont les élémens colorés pourront arriver à l'œil du spectateur ; mais ces rayons élémentaires arriveront mêlés et divergens, et la couleur du spectre qu'ils produiront, sera d'autant plus foible qu'on sera plus éloigné du lieu où est placée la goutte d'eau ; pour chaque système de rayons colorés, il y a un petit faisceau composé de rayons sensiblement parallèles ; comme on n'éprouve la sensation de la couleur propre à ces rayons que lorsque l'œil en reçoit l'impression, on les a nommés *efficaces*. La détermination de l'angle que chacun de ces faisceaux efficaces fait avec les rayons solaires, est un des principaux points de la théorie de l'arc-en-ciel.

De l'angle des rayons efficaces avec les rayons solaires.

Soit $ABCF$ (fig. 1. planche 1.) la section de la goutte d'eau dans le plan mené par le centre O de cette goutte, par l'œil du spectateur, et parallèlement aux rayons directs du soleil ; ces rayons qui tombent sur l'arc AB se réfractent et se décomposent en rayons colorés ; ne considérons de ces derniers que les rouges ; on sait par les expériences de Newton, que pour cette espèce de rayons, le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction de l'air dans l'eau est celui de 4 à 3, il sera donc facile, d'après cette donnée, de construire la fig. (1) qui représente tous les rayons rouges réfractés ; or, on voit que ces rayons sont tangens à une même caustique GCH qui coupe le grand cercle de la goutte d'eau au point C ; le rayon CE se réfléchissant en CE' et se réfractant dans l'air en $E'L'$, il est évident que le petit faisceau $ELMF$ composé de rayons parallèles, conservera son parallélisme dans la direction $E'L'M'F'$, puisque les droites $E'L'$, $F'M'$ font avec les cordes CE', CF' les mêmes angles que les droites EL,

FM font avec les cordes *CE*, *CF*; un œil placé dans la direction du rayon rouge *E' L'*, pourra recevoir l'impression du rayon qui en est très-voisin, à cause de la petite divergence de deux rayons consécutifs; mais si, par le centre *O* de la goutte d'eau, on conçoit une droite parallèle à *E' L'*, sur laquelle seront placés les centres d'autres gouttes *o'*, *o''*, etc., (fig. 2.), la lumière qui pénètre l'espace dans lequel la pluie tombe, éclairera ces gouttes, et s'y décomposera en rayons rouges; ces rayons se réunissant dans la direction *E' L'*, feront éprouver à un spectateur placé dans la même direction la sensation du rouge, à moins qu'il n'y ait autour de l'espace occupé par la pluie des parties du ciel trop éclairées, dont la lumière directe affoiblisse la lumière décomposée; mais si au-delà l'espace occupé par la pluie, on voit des nuages noirs qui servent de fond à l'arc-en-ciel, cet arc paroîtra sous des couleurs très-vives; lorsque l'espace rempli par les gouttes d'eau, n'est pas étendu en profondeur, les molécules *O*, *o'*, *o''* sont en petit nombre, et la lumière colorée qu'elles envoient, quoique dans une même direction, se disperse avant d'arriver à l'œil du spectateur; c'est d'ailleurs à cause de l'étendue des nuages que l'arc-en-ciel est visible en même tems en des lieux différens.

Tout ce qu'on vient de dire des rayons rouges doit s'entendre des rayons violets, et de tous les rayons colorés placés entre le rouge et le violet; ainsi, il y a un petit faisceau blanc composé de rayons parallèles qui, tombant sur l'arc *A B* (fig. 1) sort de la goutte d'eau sous la forme d'un petit faisceau violet, *E' F' L' M'* très-peu divergent; ce faisceau dont la couleur est augmentée par la réunion des rayons efficaces provenant des molécules disposées comme on le voit dans la fig. (2), produit sur l'œil qui est placé dans la direction de ce faisceau, l'impression du violet; la réfrangibilité des rayons violets n'étant pas la même que celle des rayons rouges, les rayons efficaces correspondant aux couleurs extrêmes de l'arc-en-ciel, le rouge et le violet, font entre eux un angle qu'on prend pour la mesure de la largeur de l'arc; le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, pour les rayons violets qui passent de l'air dans l'eau, étant supposé de 109 à 81 comme Newton l'a donné, on pourra construire la caustique de réfraction *GCH* (fig. 1), et déterminer l'angle des rayons violets efficaces, comme on a trouvé l'angle *acb* pour les rayons rouges.

L'angle de chaque faisceau de rayons colorés efficaces avec la droite menée par l'œil du spectateur parallèlement aux rayons

solaires étant constant, il est évident que cet angle sera le même dans tous les plans menés par cette droite; donc tous les rayons colorés d'une même espèce appartiendront à un cône dont l'œil est le sommet, et dont l'axe est parallèle aux rayons solaires : or l'apparence de toute courbe tracée sur un cône droit, est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe de ce cône; donc l'image du soleil, produite par les rayons que les gouttes d'eau ont décomposés, est formée d'une suite de cercles différemment colorés, dont les plans sont perpendiculaires aux rayons directs du soleil. Le cercle rouge et le cercle violet terminent cette image. La portion de ces cercles qui est visible, pour une hauteur donnée du soleil, dépend de la forme du terrein et de la position des nuages opaques qui les entourent. C'est en pleine mer, et lorsque le soleil est peu élevé au-dessus de l'horison, que l'on voit les arcs-en-ciel les plus colorés.

Il y a une circonstance assez remarquable pour les navigateurs, c'est la réunion de deux arcs-en-ciel, l'un produit par les rayons directs du soleil, et l'autre par l'image de cet astre sur la surface réfléchissante des eaux de la mer. Les droites, menées de l'œil du spectateur au centre du soleil et au centre de son image au-dessous du niveau des eaux, forment avec l'horison des angles égaux, et par conséquent les plans des arcs dus au soleil et à son image font entre eux un angle égal à celui de ces droites. On lit dans les Mémoires de l'Institut d'Egypte (pag. 8), le rapport suivant de M. Monge sur ce double arc-en-ciel :

« Pendant notre retour d'Egypte (*M. Monge accompagnoit l'Empereur qui a débarqué à Fréjus, le* 8 *octobre* 1799), lorsque nous approchions des climats d'Europe, un matin, quelques minutes après le lever du soleil, le ciel étoit clair à l'est; il pleuvoit du côté de l'ouest, et l'on voyoit les deux arcs-en-ciel ordinaires, l'un intérieur produit par une seule réflexion des rayons au-dedans des gouttes de pluie, l'autre extérieur produit par deux réflexions. Dans ce moment, la mer et l'atmosphère étoient l'un et l'autre parfaitement calmes, et la surface de l'eau qui étoit très-lisse, réfléchissoit assez bien l'image du soleil. Cette image réfléchie donnoit aussi lieu à deux arcs-en-ciel particuliers. Les deux premiers arcs, produits par les rayons directs et descendans, formoient des segmens moindres que la demi-circonférence; les deux autres, produits par les rayons réfléchis et ascendans, présentoient au contraire des segmens plus grands que de 180°. De ces quatre arcs simultanés, les analogues avoient même pied, et divergeoient, comme feroient deux segmens d'une même circonférence de cercle, repliés sur leur corde commune (les Arabes nomment ce

phénomène *âl-beïdhât*, pluriel de *d'âl-beïdah*, la lumière, la clarté). »

Cette explication s'accorde avec celle de Descartes, qui avoit observé le même phénomène près d'un grand lac.

Du second arc-en-ciel.

Les rayons colorés qui ont subi une première réflexion dans l'intérieur de la goutte d'eau, n'en sortent pas en totalité; une partie repasse dans l'air, et une autre partie éprouve une nouvelle réflexion. C'est à cette double réflexion, suivie d'une réfraction de l'eau dans l'air, qu'est dû le second arc-en-ciel; les rayons efficaces pour chaque couleur sont encore ceux qui sortent de la goutte d'eau sensiblement parallèles entre eux : or pour que ce parallélisme ait lieu, on démontre que les rayons extrêmes du faisceau coloré qui deviennent efficaces sont, dans la première réflexion, parallèles entre eux; en effet, soit $MFLE$ (fig. 3.) le faisceau qui doit devenir efficace; il se réfracte suivant $FEfe$, et il se réfléchit suivant $efe'f'$. Or si les deux rayons ee', ff' sont parallèles, leurs réfléchis $e'E'$, $f'F'$ comprendront, en se croisant, les deux arcs $e'f'$, $E'F'$ égaux chacun à l'arc ef, et feront, avec les rayons réfractés $F'M'$, $E'L'$, des angles égaux à ceux que les rayons incidens MF, LE font avec les rayons qui se réfractent suivant Ff et Ee; donc les rayons $F'M'$, $E'L'$ sont parallèles entre eux, comme les droites FM, EL le sont entre elles.

Pour un troisième arc-en-ciel, les rayons colorés éprouveroient dans l'intérieur de la goutte d'eau trois réflexions avant de rentrer dans l'air ; le faisceau, à la 1^re^. réfraction et à la 3^e^. réflexion, devra, pour devenir efficace, rencontrer le grand cercle de la goutte d'eau sous le même angle; d'où il suit que pour ce 3^e^. arc, les rayons extrêmes de ce faisceau doivent, à la première réflexion, concourir, comme dans le 1^er^. arc à la première réfraction, en un point du grand cercle de la goutte d'eau. En raisonnant de la même manière pour le 4^e^. arc, on verra que les rayons extrêmes du faisceau doivent devenir parallèles à la seconde réflexion, et pour le 5^e^. arc, ils concourent à la troisième réflexion sur le grand cercle de la goutte d'eau. Pour le 6^e^. arc, ils deviennent parallèles à la quatrième réflexion, et ainsi de suite. En général, pour le n^e. arc, ils deviennent parallèles à la $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{eme}}$. réflexion, lorsque n est pair; ils concourent sur le grand cercle de la goutte d'eau à la $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{eme}}$. réflexion, lorsque n est impair.

Le second arc-en-ciel n'étant dû qu'à deux réflexions successives des rayons efficaces dans l'intérieur de la goutte d'eau, on conçoit que ses couleurs doivent être beaucoup moins intenses que celles du premier; mais il y a une autre circonstance qui distingue ces deux arcs, c'est le renversement des couleurs. Dans le premier arc, le cercle rouge est plus élevé par rapport à l'horison que le cercle violet, et c'est l'inverse pour le second arc. Le même renversement de couleurs a lieu dans deux arcs consécutifs, dont l'un provient d'un nombre impair et l'autre d'un nombre pair de réflexions. Le premier arc-en-ciel diffère encore du second par la largeur, c'est-à-dire par l'angle que les arêtes des cônes qui ont pour base les cercles extrêmes d'un même arc, font entre elles dans un plan mené par l'axe commun de ces cônes. Les fig. 1, 2, 3 suffisent pour rendre raison de ces différences par rapport aux deux premiers arcs-en-ciel; mais le calcul donnera la valeur exacte des angles dont ces différences dépendent, non-seulement pour ces deux arcs, mais encore pour ceux qui résultent d'un nombre quelconque de réflexions.

Théorie de l'arc-en-ciel déduite du calcul.

Soit *ADEF* (fig. 4) la section de la goutte d'eau dans le plan mené par le centre de cette goutte, le centre du soleil et l'œil du spectateur; un rayon blanc *SA* se réfracte suivant *AD*, et se réfléchit un nombre p de fois, suivant les droites *AD*, *DF*, *EF*, etc., et rentre dans l'air suivant la droite *Fœ*, qui, étant prolongée, rencontre la droite *SA* au point *C*; l'angle *BFE* du dernier rayon réfléchi *FE* avec la droite *BF* étant égal à l'angle *BAD* du rayon réfracté *AD* avec la droite *BA*, il est évident que l'angle *EFC* est égal à l'angle *DAC*, puisque le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est constant; donc la droite *BC* divisera l'angle *ACF* en deux parties égales *ACB*, *BCF*.

Soit m l'angle d'incidence *BAC*;
n l'angle de réfraction *BAD*;
a le rapport de sin m à sin n, le rayon étant 1;
π la demi-circonférence dont le rayon est 1.

Nous allons d'abord chercher l'expression de l'angle *ACF* correspondant à un nombre quelconque p de réflexions, en fonction des deux angles m et n; puis nous déterminerons la valeur de cet angle, correspondant aux rayons efficaces, d'après la condition qu'elle ne varie pas, lorsqu'on fait varier infiniment peu

l'angle d'incidence m; cette méthode de calcul est celle qu'a donnée M. Poisson, dans une édition de l'Optique de Lacaille, augmentée par des Élèves de l'École Polytechnique.

L'angle $ACB = \pi - m - ABC$; or, l'angle $ABC = \frac{ADEF...}{2}$ $=$ angle $ABD \times \frac{(p+1)}{2}$, mais l'angle $ABD = \pi - 2n$.

Donc l'angle $ABC = (\pi - 2n) \frac{(p+1)}{2}$, et enfin

angle $ACB = y = \pi - m - (\pi - 2n) \frac{(p+1)}{2}$, et réduisant:

$$2y = 2n(p+1) - 2m - \pi(p-1) \qquad (1)$$

Lorsque le rayon CF est efficace, on doit avoir $\frac{dy}{dm} = 0$;

Différentiant l'équation (1), on a $\frac{dn}{dm}(p+1) - 1 = 0 \qquad (2)$

Mais, d'après les données, . . . $\frac{\sin m}{\sin n} = a \qquad (3)$

D'où l'on tire . . . . $\frac{dn}{dm} = \frac{\cos m}{a \cos n} \qquad (4)$

Substituant cette valeur de $\frac{dn}{dm}$ dans l'équation (2),

on aura $\qquad (p+1)\cos m = a \cos n \qquad (5)$

En combinant les équations (3) et (5), on obtient les valeurs suivantes.

$$\left.\begin{aligned}
\sin m &= \pm \sqrt{1 - \frac{(a^2-1)}{p(p+2)}} \\
\cos m &= \pm \sqrt{\frac{a^2-1}{p(p+1)}} \\
\sin n &= \pm \frac{1}{a}\sqrt{1 - \frac{(a^2-1)}{p(p+2)}} \\
\cos n &= \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{(a^2-1)(p+1)}{p}}
\end{aligned}\right\} (E).$$

Les angles m et n étant connus par ces équations, l'équation (1) donnera la valeur de $2y$ correspondant aux rayons efficaces.

La valeur de sin m est double; le signe $+$ correspond au cas où le point d'incidence A (fig. 4) est au-dessus de la droite BO parallèle aux rayons solaires; et le signe $-$ correspond au cas où ce point est au-dessous de cette même droite; le signe qu'on doit prendre pour sin m est déterminé par la condition, que le rayon $F\oe$ n'est efficace que pour un spectateur qui ne reçoit pas les rayons directs du soleil : ainsi on voit (fig. 1) que si pour la première réflexion, c'est-à-dire lorsque $p=1$, sin m est positif; pour la seconde réflexion (fig. 3), auquel cas $p=2$, sin m est négatif.

En observant que dans l'équation (1), $p-1$ est un nombre entier pair lorsque p est impair, et qu'il est un nombre impair lorsque p est pair, on aura lorsque p est impair

$$2y = 2n(p+1) - 2m \qquad (P')$$

Et si on suppose que lorsque p est pair, les angles y, m, n et le nombre p soient représentés par les lettres Y, M, N, P.

on aura $$2Y = 2N(P+1) - 2M - \pi \qquad (P'')$$

La valeur d'un angle étant toujours double à cause de son supplément, la même considération qui sert à déterminer le signe du sinus de l'angle d'incidence m, fera voir laquelle des deux valeurs données par chacune des deux équations (P'), (P'') on doit prendre.

On voit par les équations (E) que si la valeur a du rapport entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction augmente, le sinus de l'angle m et l'angle lui-même diminuent; donc si dans l'équation (P') on change les angles y, m, n correspondant au rapport a et au nombre de réflexions p, et qu'on y substitue les angles y', m', n' qui correspondent au rapport a' et au même nombre p, cette équation (P') deviendra

$$2y' = 2n'(p+1) - 2m' \qquad (Q')$$

dans laquelle m' et n' sont des angles plus petits que m et n.

a et a' étant les rapports des sinus d'incidence et de réfraction pour les rayons rouges et violets, $2y-2y'$ sera la largeur de l'arc-en-ciel, c'est-à-dire qu'on verra les rayons colorés extrêmes de cet arc sous l'angle $2y-2y'$.

Lorsqu'on a $y > y'$, les rayons rouges sont plus élevés par

rapport à l'horison, que les rayons violets, et c'est l'inverse lorsqu'on a $y < y'$.

Les équations (P') et (Q') pourront être mises sous cette forme

$$2y = 2np - 2(m - n)$$

$$2y' = 2n'p - 2(m' - n') \text{ ou } 2y' = 2np - 2kp - 2(m' - n')$$

en nommant k la différence de n à n'; or pour la valeur de $a = \frac{4}{3}$, et $a' = \frac{109}{81}$, on a $2(m - n) < 2kp + 2(m' - n')$; d'où il suit que, pour cette valeur, on aura $2y > 2y'$; c'est-à-dire que, pour les arcs-en-ciel d'un nombre impair de réflexions, les rayons rouges sont plus élevés par rapport à l'horison, que les rayons violets.

En raisonnant de la même manière sur l'équation (P''), elle deviendra, pour le rapport a',

$$2Y' = 2N'(P + 1) - 2M' - \pi \qquad (Q'')$$

et la différence des deux angles $2Y'$ et $2Y$ donnera la largeur de l'arc-en-ciel correspondant au nombre P, qu'on suppose pair. Les angles Y et Y' étant positifs et moindres que $180°$ ou π, on peut écrire ainsi les équations (P'') et (Q'')

$$2Y = \pi + 2M - 2N(P + 1)$$

$$2Y' = \pi + 2M' - 2N'(P + 1)$$

Faisant $N' = N - \delta$,

$$2Y = \pi + 2(M - N) - 2NP$$

$$2Y' = \pi + 2(M' - N') + 2\delta P - 2NP.$$

Or, pour le rapport $a = \frac{4}{3}$ et $a' = \frac{109}{81}$, on a

$$(M - N) < (M' - N') + \delta P,$$

donc $2Y'$ est plus grand que $2Y$; donc, pour tous les arcs-en-ciel d'un nombre pair de réflexions, les rayons violets sont plus élevés par rapport à l'horison du spectateur, que les rayons rouges; ce qui explique le renversement des couleurs dans le premier et le second arc-en-ciel, quoique ces couleurs se succèdent dans le même ordre, c'est-à-dire en allant dans l'un et l'autre cas du rouge au violet, ou du violet au rouge.

En comparant entre elles les valeurs $Y' - Y$ et $y - y'$, on aura les différences entre les diamètres des arcs-en-ciel d'un nombre pair ou impair de réflexions.

Calcul numérique de l'arc-en-ciel.

On suppose que le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction est $\frac{4}{3}$ pour les rayons rouges, et $\frac{109}{81}$ pour les rayons violets.

Du premier arc-en-ciel, pour lequel on a p = 1.

Faisant, dans les équations (E) pag. 406, $a = \frac{4}{3}$, $p = 1$,

on a $\quad \sin m = \sqrt{\frac{20}{27}}, \qquad \sin n = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{20}{27}}.$

Or, $\quad \log 20 = 1.30103000, \qquad \frac{1}{2} \log 20 = 0.65051500$

$\log 27 = 1.43136376, \qquad \frac{1}{2} \log 27 = 0.71568188$

Retranchant $\frac{1}{2} \log 27$ de la somme $10 + \frac{1}{2} \log 20$, on a

pour le logarithme de sin m,	9.93483312
Ajoutant le logarithme de 3	0.47712125
	10.41195437
Retranchant log 4	0.60205999
on a, pour le logarithme de sin n,	9.80989438
et par approximation	9.8098944

d'où l'on a, d'après les tables,

$$m = 59^\circ\, 23'\, 28'', \qquad n = 40^\circ\, 12'\, 10'',6$$

ou, d'après l'équation (1),

$$2y = 2(2n - m)$$

Donc, pour le premier arc-en-ciel, l'angle des rayons rouges efficaces avec les rayons directs du soleil est égal à $42^\circ\ 1'.46'',4$; pour trouver l'angle des rayons violets efficaces avec les mêmes rayons directs du soleil, il faut, dans les équations (E), faire $a = \frac{109}{81}$, et $p = 1$, ce qui donne

$$\sin m' = \sqrt{\frac{14363}{19683}}, \qquad \sin n' = \frac{81}{109}\sqrt{\frac{14363}{19683}}.$$

En désignant par m' et n' les valeurs de m et n correspondantes au rapport $\frac{81}{109}$.

$$\log 14363 = 4.1572452, \qquad \frac{1}{2} \log 14363 = 2.0786226$$

$$\log 19683 = 4.2940913, \qquad \frac{1}{2} \log 19683 = 2.1470456$$

ce qui donne, pour $\log \sin m'$,	9.9315770
$\text{Log } 81 =$	1.9084850
$\text{Log } \sin m + \log 81 =$	11.8400620
Retranchant $\log 109 =$	2.0374265
on a, pour $\log \sin n'$	9.8026355

ce qui donne

$$m' = 58^\circ\ 40'\ 31'', \qquad n' = 39^\circ\ 24'\ 18''.$$

Par l'équation (1), $2y' = 2(2n' - m')$,
donc $2y' = 40^\circ\ 16'\ 10''$
mais $2y = 42^\circ\ 1'\ 46''$, donc le diamètre $2y - 2y'$ du premier arc-en-ciel est $1^\circ\ 45'\ 36''$.

Du second arc-en-ciel, par lequel on a $p = 2$.

Faisant, dans les équations (E), $a = \frac{4}{3}$, $p = 2$, on a

$$\sin m = \sqrt{\frac{65}{72}}, \qquad \sin n = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{65}{72}}.$$

$$\text{Log } 65 = 1.81291336, \qquad \frac{1}{2} \log 65 = 0.90645668$$

$$\text{Log } 72 = 1.85733250, \qquad \frac{1}{2} \log 72 = 0.92866625$$

Log sin m,	$= 9{,}97779043$
Ajoutant log 3	$= 0.47712125$
Log sin m + log 3	$= 10.45491168$
Retranchant log 4	$= 0.60205999$
Log sin n	$= 9.85285169$
et par approximation	$= 9.8528517$

Cherchant les valeurs de m et n correspondantes à leurs sinus, on a

$$m = 71° \, 49' \, 55'', \qquad n = 45° \, 26' \, 51''.$$

Or, d'après l'équation (1), $2y = 2(3n - m) - \pi$,

ou $$2y = \pi - 2(3n - m).$$

Donc, par le second arc-en-ciel, les rayons rouges efficaces font, avec les rayons directs du soleil, un angle

$$2y = 50° \, 58' \, 44''.$$

Les équations (E) donnent pour les angles m et n qui correspondent à la valeur $\frac{109}{81}$ de a, et que nous nommerons m' et n', pour les distinguer des précédentes,

$$\sin m' = \sqrt{\frac{47168}{52488}}, \qquad \sin n' = \frac{81}{109}\sqrt{\frac{47168}{52488}}.$$

$$\text{Log } 47168 = 4.6736475, \qquad \frac{1}{2} \log 47168 = 2.3368237$$

$$\text{Log } 52488 = 4.7200600, \qquad \frac{1}{2} \log 52488 = 2.3600300$$

Log sin m'	$= 9.9767937$
Log 81	$= 1.9084850$

Log sin m' + log 81 $= 11.8852787$
Retranchant log 109 $= 2.0374265$

Log sin n' $= 9.8478522$

Les tables donnent, pour m' et n',

$$m' = 71^\circ\ 26'\ 9'', \qquad n' = 44^\circ\ 47'\ 8'',$$

et à cause de $2y' = \pi - 2(3n' - m')$

$$2y' = 54^\circ\ 9'\ 30''.$$

Pour le premier arc-en-ciel, on a trouvé $2y > 2y'$, pour le second $2y' > 2y$; donc, les couleurs de ces deux arcs vont, dans le premier, en comptant de l'horison, du violet au rouge, et dans le second, du rouge au violet.

Le diamètre du second arc a, pour expression,

$$2y' - 2y = 3^\circ\ 10'\ 46''$$

tandis que le diamètre du premier est $1^\circ\ 45'\ 36''$.

Les deux arcs-en-ciel correspondant à $p = 1$ et $p = 2$ étant souvent visibles en même tems, on pourra vérifier par expérience la mesure des angles donnés par le calcul. Les différences qu'on observera seront dues au diamètre du soleil, dont on a fait abstraction, et elles seront d'ailleurs très-petites. L'effet de ce diamètre est d'augmenter la largeur des arcs-en-ciel et de diminuer l'intervalle qui les sépare.

Nous terminerons cet article par une note historique sur l'arc-en-ciel.

Note historique sur l'arc-en-ciel.

Les anciens philosophes qui ont cherché l'explication de l'arc-en-ciel, supposoient que ce phénomène étoit un effet de la réflexion de la lumière à la surface des gouttes d'eau répandues dans l'air suivant un certain ordre; des idées plus justes prirent la place de ces hypothèses, lorsqu'on connut l'expérience de *Marc-Antoine* Dominis, archevêque de Spalato, mort à Rome en 1625, dans les prisons de l'inquisition. Avant de publier le Traité de théologie qui a été la principale cause de ses malheurs, ce prélat avoit écrit un ouvrage d'optique: « *De Radiis visûs et lucis in vitris perspectivis, et iride, tractatus* », petit in-4°. de 78 pag., imprimé à Venise en 1611. La première partie de cet ouvrage traite des

verres de lunettes et de leur usage pour remédier aux défauts de la vue. L'arc-en-ciel est le principal sujet de la seconde partie. L'explication de ce phénomène n'est pas aussi heureuse qu'on auroit pu l'attendre de l'expérience qui lui sert de base, et qui consiste à suspendre une fiole ou une petite boule en verre remplie d'eau, de manière qu'elle soit éclairée par les rayons du soleil. Un spectateur, placé convenablement entre le soleil et la boule d'eau, voit deux spectres colorés, tout aussi distincts que ceux qu'on obtient par des prismes de verre. L'auteur de cette expérience en a conclu que la goutte de pluie d'une forme sphérique devoit produire les mêmes effets que la boule d'eau; il a ajouté à cette conclusion la véritable raison de l'apparence circulaire de l'iris: mais en admettant un faux principe, qui d'ailleurs lui sembloit prouvé par son expérience, il passa bientôt de la vérité à l'erreur. Il a supposé que, lorsque la lumière se réfléchissoit dans l'intérieur des corps transparens, cette réflexion se faisoit et ne pouvoit se faire que *de deux manières*. Il ne se douta pas que le même rayon de lumière pouvoit subir dans l'intérieur de la goutte d'eau un nombre indéfini de réflexions; et, d'après son principe, il s'est dispensé de rechercher la raison des rayons efficaces. Cette dernière découverte exigeoit plus de connoissances mathématiques que n'en avoit M. A. *Dominis*, elle étoit réservée à Descartes.

Dans le même tems où l'ouvrage de *Dominis* a paru, on s'occupoit avec succès en Hollande de dioptrique. *Jacques* Metius, habile artiste, frère du géomètre *Adrien* Metius, avoit fait hommage de la première lunette d'approche aux Etats-Généraux de Hollande de 1609; Snellius Wilbrod, professeur de mathématiques à Leyde en 1613, avoit trouvé cette loi si simple de la réfraction, *que les sinus d'incidence et de réfraction sont dans un rapport constant*. Quoique les deux ouvrages imprimés de ce geomètre *Erasthotenes batavus* et *Cyclometrium*, ne fassent pas mention de cette découverte; quoiqu'un jésuite allemand, Scheiner, n'en ait point parlé dans un ouvrage d'optique publié en 1619, sous le titre de *Oculus*, cependant Vossius (Isaac), né à Leyde en 1618, ne laisse aucun doute sur cette époque de l'histoire de l'optique; il dit positivement dans son traité *De Lucis naturâ et proprietate*, imprimé en 1662, que Wilbrod Snellius avoit laissé à ses héritiers trois livres d'optique inédits, dans lesquels on trouve l'énoncé très-clair et très-précis de la loi de la réfraction. Descartes, qui a passé de France en Hollande en 1629, a dû connoître les travaux des savans hollandais; et quoiqu'il ne cite pas Snellius dans son Traité d'optique, qui a paru en 1637, on doit regarder ce géomètre comme l'inventeur de la loi de la réfraction. D'ailleurs, si Descartes ne l'avoit pas supposée connue, ou il l'auroit

démontrée, ou il l'auroit présentée comme un résultat d'expériences. Loin de le démontrer, il se perd en faux raisonnemens sur les causes de la réfraction; car Leibnitz paroît être le premier qui ait considéré la lumière comme un corps soumis à la loi générale de l'attraction. (Voyez son mémoire : *Acta eruditorum. Lipsiæ*, 1682.) Quant à l'application de la découverte de Snellius à la détermination des rayons rouges efficaces dans l'arc-en-ciel, elle est bien due à Descartes, et on connoît par sa Dioptrique la méthode de calcul qui lui a donné le véritable diamètre de l'arc-en-ciel.

Après avoir appliqué la loi de la réflexion de la lumière aux réflexions successives qu'un même rayon lumineux peut subir dans l'intérieur d'un corps transparent, Descartes examine ce que deviennent des rayons de lumière parallèles entre eux qui tombent sur un cercle d'un rayon 10000, sous des angles tels que leurs sinus croissent en proportion arithmétique depuis 1000 jusqu'à 10000, la raison de cette progression étant 1000. Ayant calculé pour une, et ensuite pour deux réflexions les angles des rayons sortans du cercle avec les rayons entrans, il a vu que par le premier arc-en-ciel, ces angles augmentoient d'abord depuis 5° 40′, correspondant au sinus d'incidence 1000, jusqu'à 40° 57′, correspondant au sinus 9000, qu'ils diminuoient ensuite de telle sorte qu'au sinus de 10000 égal au rayon, correspond un angle de 13° 40′. Connoissant, par ces premiers essais de calcul, que les rayons sortans qui sont les moins divergens entre eux, correspondoient à un angle d'incidence compris entre ceux dont les sinus sont 9000 et 10000, il est parvenu, d'après les mêmes essais, aux angles de 42° et de 51° que les rayons rouges efficaces font avec les rayons solaires dans le premier et le second arc-en-ciel. Cette méthode est très-ingénieuse, et n'auroit rien laissé à desirer, si à cette époque on eût connu le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour les rayons violets, comme on le connoissoit pour les rayons rouges; Descartes le supposoit pour ces derniers rayons égal à $\frac{250}{187}$; qui diffère peu de celui de 4 à 3.

L'angle des rayons efficaces avec les rayons solaires étoit évidemment, d'après les calculs numériques précédens, un *maximum*. Newton a déterminé cet angle d'après les méthodes d'analyse déja connues de son tems, et il a completté la théorie de l'arc-en-ciel, en démontrant la différence de réfrangibilité des rayons colorés. Son optique a paru en 1704; d'où il résulte qu'en s'approchant toujours de plus en plus de la vérité, on s'est occupé environ cent ans de l'arc-en-ciel avant qu'on ait trouvé une explication juste et complette de ce phénomène.

GEOMETRIE ANALYTIQUE.

Démonstration d'un théorême sur la pyramide triangulaire; *par* M. HACHETTE.

M. Carnot a donné, dans sa Géométrie de position, n°. 262, un très-beau théorême dont voici l'énoncé:

Nommant M, N, P, Q, les aires des faces d'une pyramide triangulaire et de sa base, m, n, p les angles dièdres opposés aux faces M, N, P, on a, entre ces sept quantités, la relation suivante

$$Q^2 = M^2 + N^2 + P^2 - 2MN\cos p - 2NP\cos m - 2PM\cos n \qquad (A).$$

Pour le démontrer, soient m', n', p' les angles des faces M, N, P qui ont pour sommet commun le sommet de la pyramide; M', N', P' les côtés de la base de la pyramide opposés à ces angles; p'', n'', m'' les longueurs des arêtes de la pyramide qui, prises deux à deux dans l'ordre suivant (p'', n''), (m'', p''), (n'', m''), comprennent entre elles les faces M, N, P.

Les théorêmes de la géométrie élémentaire et de la trigonométrie rectiligne donnent les équations suivantes

$$M'^2 = n''^2 + p''^2 - 2n''p''\cos m' \qquad (1)$$
$$N'^2 = m''^2 + p''^2 - 2m''p''\cos n' \qquad (2)$$
$$P'^2 = m''^2 + p''^2 - 2m''p''\cos p' \qquad (3)$$
$$M = \tfrac{1}{2}n''p''\sin m' \qquad (4)$$
$$N = \tfrac{1}{2}p''m''\sin n' \qquad (5)$$
$$P = \tfrac{1}{2}m''n''\sin p' \qquad (6)$$

Par les formules de la trigonométrie sphérique (*Voy*. pag. 275 de cette Correspondance), on a

$$\cos m' - \cos n'\cos p' = \sin n'\sin p'\cos m \qquad (7)$$
$$\cos n' - \cos p'\cos m' = \sin p'\sin m'\cos n \qquad (8)$$
$$\cos p' - \cos m'\cos n' = \sin m'\sin n'\cos p \qquad (9)$$

Enfin la formule au moyen de laquelle on détermine l'aire d'un triangle au moyen de ses trois côtés, donne l'équation suivante

$$Q^2 = \frac{1}{16}\left\{2M'^2N'^2 + 2N'^2P'^2 + 2P'^2M'^2 - M'^4 - N'^4 - P'^4\right\} \,. \quad (B).$$

Au moyen des neuf équations cotées de 1 à 9, on tirera les valeurs des neuf quantités M', N', P', m', n', p', m'', n'', p''; on les substituera dans l'équation (B), qui deviendra l'équation (A). D'abord quarrant les équations (1), (2), (3), on a

$$\begin{aligned} M'^4 = {} & n''^4 + 2\,n''^2p''^2 + p''^4 - 4\,n''^3p''\cos m' \\ & - 4\,n''p''^3 \cos m' + 4\,n''^2p''^2 \cos m'^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'^4 = {} & p''^4 + 2\,m''^2p''^2 + m''^4 - 4\,m''p''^3\cos n' \\ & - 4\,m''^3p'' \cos n' + 4\,m''^2p''^2 \cos n'^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'^4 = {} & m''^4 + 2\,m''^2n''^2 + n''^4 - 4\,m''^3n''\cos p' \\ & - 4\,m''n''^3 \cos p' + 4\,m''^2n''^2 \cos p'^2. \end{aligned}$$

Multipliant ces mêmes équations deux à deux, les produits deviennent

$$\begin{aligned} M'^2N'^2 = {} & m''^2n''^2 + n''^2p''^2 + p''^2m''^2 + p''^4 \\ & - 2\cos m'(m''^2n''p'' + n''p''^3) - 2\cos n'(m''n''^2p'' + m''p''^3) \\ & + 4\,m''n''p''^2 \cos m' \cos n'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'^2P'^2 = {} & n''^2p''^2 + p''^2m''^2 + m''^2n''^2 + m''^4 \\ & - 2\cos n'\,(n''^2p''m'' + p''m''^3) - 2\cos p'(n''p''^2m'' + n''m''^3) \\ & + 4\,n''p''m''^2 \cos n' \cos p'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'^2M'^2 = {} & p''^2m''^2 + m''^2n''^2 + n''^2p''^2 + n''^4 \\ & - 2\cos p'\,(p''^2m''n'' + m''n''^3) - 2\cos m'(p''m''^2n'' + p''n''^3) \\ & + 4\,p''m''n''^2 \cos p' \cos m'. \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation (B), et observant qu'au lieu des trois quantités $1 - \cos m'^2$, $1 - \cos n'^2$, $1 - \cos p'^2$, on peut mettre les trois suivantes : $\sin m'^2$, $\sin n'^2$, $\sin p'^2$, on a, réduction faite

$$\begin{aligned} 16\,Q^2 = {} & 4\,n''^2p''^2 \sin m'^2 + 4\,m''^2p''^2 \sin n'^2 + 4\,m''^2n''^2 \sin p'^2 \\ & - 8m''n''p''\big\{m''(\cos m' - \cos n' \cos p') + n''(\cos n' - \cos m' \cos p') \\ & + p''(\cos p' - \cos m' \cos n')\big\} \end{aligned}$$

Par les équations (7), (8), (9), cette dernière devient

$$16\,Q^2 = 4\,n''^2p''^2\sin m'^2 + 4\,m''^2p''^2\sin n'^2 + 4\,m''^2n''^2\sin p'^2$$
$$-8\,m''n''p''\{m''\sin n'\sin p'\cos m + n''\sin p'\sin m'\cos n + p''\sin m'\sin n'\cos p\}.$$

divisant par 16, et effectuant les multiplications, on a

$$Q^2 = \frac{1}{4}\,n''^2p''^2\sin m'^2 + \frac{1}{4}\,m''^2p''^2\sin n'^2 + \frac{1}{4}\,m''^2n''^2\sin p'^2$$
$$-\frac{2}{4}\,m''^2n''p''\sin n'\sin p'\cos m - \frac{2}{4}\,m''n''^2p''\sin p'\sin m'\cos n$$
$$-\frac{2}{4}\,m''n''p''^2\sin m'\sin n'\cos p\,;$$

mais les équations (4), (5), (6) donnent

$$M^2 = \frac{1}{4}\,n''^2p''^2\sin m'^2,\quad N^2 = \frac{1}{4}\,p''^2m''^2\sin n'^2,$$
$$P^2 = \frac{1}{4}\,m''^2n''^2\sin p'^2,$$

$$NP = \frac{1}{4}\,m''^2n''p''\sin n'\sin p'$$
$$PM = \frac{1}{4}\,m''n''^2p''\sin p'\sin m'$$
$$MN = \frac{1}{4}\,m''n''p''^2\sin m'\sin n'.$$

Remettant les expressions dans la valeur de Q^2, on a

$$Q^2 = M^2 + N^2 + P^2 - 2\,NP\cos m - 2\,PM\cos n - 2\,MN\cos p\,, \qquad (A)$$

suivant l'énoncé du théorême de M. Carnot.

M. Ensheim (de Metz) a déduit de ce théorême les équations, d'où dépend la solution du problême: « Diviser une pyramide triangulaire en deux volumes équivalens, par un plan tel que la section de la pyramide soit un *minimum*, » comme on peut le voir dans le cahier précédent, pag. 349. M. François, qui s'est occupé du même problême a reconnu, par le calcul de M. Ensheim, qu'il s'étoit trompé, en supposant que le plan qui contient la section

minimum retranche de la pyramide donnée une pyramide qui a ses arêtes de même longueur, et en concluant qu'elle est inscriptible à la sphère, dont le centre est au sommet de cette pyramide; M. Billy avoit reconnu l'inexactitude de cette conclusion pour plusieurs cas particuliers, entre autres pour celui où les deux angles dièdres de la pyramide proposée sont droits, et le troisième quelconque. Voici le calcul de ce géomètre pour ce dernier cas.

Nommant s, s', s'' les aires des trois faces de la pyramide proposée, on a l'équation $s^2 = s'^2 + s''^2 + s'''^2 - 2s's''\cos A$, l'angle A étant compris entre les faces dont les aires sont s' et s''.

De cette équation on tire celle-ci

$$s^2 = \frac{1}{4}(s' - s'')^2 \times (3 + \cos A) + \left(s''' - \frac{(s' + s'')\sqrt{1 - \cos A}}{2}\right)^2$$
$$+ s's'' + s''s''' + s's''\sqrt{1 - \cos A},$$

expression qui devient un *minimum* quand $s' = s''$, et ....
$s''' = \frac{(s' + s'')}{2}\sqrt{1 - \cos A}$, parce que dans cette supposition, les deux premiers termes qui dans tout autre cas sont positifs, s'évanouissent, et les trois derniers termes, dont le produit est constant, deviennent égaux, circonstance qui rend leur somme un *minimum* : or M. Billy ajoute que les arêtes de la pyramide correspondant à ce *minimum* sont dans le rapport des nombres $1, 1, \cos\frac{1}{2}A \times \sqrt{2}$, et par conséquent d'inégales longueurs.

Lettre de M. François, capitaine du génie, à M. Hachette.

Strasbourg, 10 avril 1808.

J'ai l'honneur de vous adresser une correction pour la partie fautive de ma solution de votre problême. Tout ce qui vient après les équations (d), pag. 348, doit être remplacé par ce qui suit.

Supposons maintenant le plan coupant mené; le volume de la nouvelle pyramide sera

$$V' = \frac{\varrho'^3 F}{6A'B'C'} = \frac{\varrho'^3 \sin(x, yz)\sin(y, z)}{6\cos(\varrho', x)\cos(\varrho', y)\cos(\varrho', z)}$$
$$= \frac{\varrho'^3 \sin(y, xz)\sin(y, z)}{6\cos(\varrho', x)\cos(\varrho', y)\cos(\varrho', z)} = \frac{\varrho'^3 \sin(z, xy)\sin(x, y)}{6\cos(\varrho', x)\cos(\varrho', y)\cos(\varrho', z)}. \quad (e)$$

La perpendiculaire ρ', combinée avec les trois arêtes x, y, z, partagera cette pyramide en trois autres; en représentant leurs volumes par v, v', v'', on aura pour leurs valeurs

$$v=\frac{\rho'^3\sin(\rho',yz)\sin(y,z)}{6\cos(\rho',y)\cos(\rho',z)},\quad v'=\frac{\rho'^3\sin(\rho',x,z)\sin(x,z)}{6\cos(\rho',x)\cos(\rho',z)},$$

$$v''=\frac{\rho'^3\sin(\rho',xy)\sin(x,y)}{6\cos(\rho',x)\cos(\rho',y)}; \tag{f}$$

En divisant ces équations par leurs correspondantes (e), on obtient pour seconds membres les équations (d), qui prennent ainsi la forme suivante

$$\frac{v}{V'}=\tfrac{1}{3},\quad \frac{v'}{V'}=\tfrac{1}{3},\quad \frac{v''}{V'}=\tfrac{1}{3}. \tag{g}$$

Il suit de là que la perpendiculaire ρ' partage la pyramide cherchée en trois autres pyramides équivalentes en volume; or, ces trois pyramides ayant même hauteur, il s'ensuit que leurs bases sont équivalentes en surface : le pied de la perpendiculaire δ' tombe donc au centre de gravité de la base totale. Ainsi il faut que le plan de cette base soit placé de manière que la perpendiculaire, abaissée du sommet opposé, tombe sur son centre de gravité.

La droite ρ' divisant l'angle solide, formé par les plans coordonnés, en trois parties égales, la construction de notre problême dépend de la trisection d'un angle trièdre : ainsi il ne faudra pas nous attendre à une construction plus simple que celle de la trisection d'un angle plan. Nous allons en indiquer une que nous déduirons de notre analyse.

En substituant dans les équations (c) pour A', B', C', leurs valeurs (18, *p.* 341), et pour a', b', c' leurs valeurs $\frac{x}{\rho'}$, $\frac{y}{\rho'}$, $\frac{z}{\rho'}$, elles deviennent

$$x\{x+y\cos(x,y)+z\cos(x,z)\}=y\{y+z\cos(y,z)+x\cos(x,y)\}$$
$$=z\{z+x\cos(x,z)+y\cos(y,z)\}=\tfrac{1}{3}\rho'^2; \tag{h}$$

d'où l'on déduit

$$\left.\begin{aligned} x^2+xz\cos(x,z)&=y^2+yz\cos(y,z),\\ x^2+xy\cos(x,y)&=z^2+yz\cos(y,z).\end{aligned}\right\}\ (i)$$

Ces deux équations sont celles de deux surfaces coniques du second degré, ayant leurs centres à l'origine, et dont l'intersection

donne la direction de la droite ϱ'. Ces deux cônes pouvant se couper généralement selon quatre droites, fournissent quatre solutions pour les quatre angles trièdres formés par les trois plans coordonnés. Toutes ces droites passant par l'origine, il suffit d'avoir pour chacune un second point pour les déterminer : à cet effet, coupons les deux surfaces (i) par un même plan, et nous aurons deux courbes du second degré, dont les intersections fourniront les points demandés. Prenons par exemple pour plan coupant celui $x=m$ parallèle au plan des $y\,z$, et nous obtiendrons les deux paraboles.

$$\left.\begin{array}{r} y^2+yz\cos(y,z)=my\cos(x,y)+m^2. \\ z^2+yz\cos(y,z)=mz\cos(x,z)+m^2. \end{array}\right\}\quad(l)$$

dont les intersections détermineront les quatre points demandés. Les deux équations (l), comme on sait, ne sont pas indispensables pour déterminer ces points : deux combinaisons quelconques de ces équations peuvent les remplacer. Ainsi, en prenant leur somme et leur différence, on a, pour obtenir le même but les équations

$$y^2+2yz\cos(y,z)+z^2=m\,\{y\cos(x,y)+z\cos(x\,z)\}+2m^2,$$
$$z^2-y^2=m\,\{y\cos(x,y)-z\cos(x,z)\},\qquad(m)$$

dont la première est celle d'une ellipse, et la seconde celle d'une hyperbole.

Lorsque deux des angles (x,y), $(x\,z,)$ $(y,z,)$ sont égaux, cette construction devient beaucoup plus simple. En supposant par exemple les deux derniers de ces angles égaux, la première des équations (i) devient

$$(x-y)\,\{x+y+z\cos(y,z)\}=0,$$

qui équivaut aux deux suivantes

$$x-y=0,\quad x+y+z\cos(y,z)=0,\qquad(n)$$

la construction se réduit donc, dans ce cas, à l'intersection du cône, représenté par la seconde des équations (i) avec les deux plans (n).

Enfin, lorsque tous les trois angles susdits sont égaux, la seconde des équations (i) devient

$$(x-z)\,\{x+z+y\cos(y,z)\}=0,$$

et représente les deux plans suivans

$$x-z=0,\quad x+z+y\cos(y,z)=0,\qquad(o)$$

dont les intersections avec les plans (n) fournissent les quatre droites demandées.

On voit donc que, dans tous les cas, le problême fournit toujours quatre solutions, correspondantes aux quatre angles trièdres formés par les plans coordonnés.

En éliminant entre les deux équations (i) on obtient

$$y^4 \sin^2 (x,y) + y^3 z \cos (x,y) \{\cos (x,z) - \cos (x,y) \cos (y,z)\}$$
$$-2y^2z^2 \{1 - \cos (x,y) \cos (x,z) \cos (y,z)\}$$
$$+ yz^3 \cos (x,z) \{\cos (x,y) - \cos (x,z) \cos (y,z)\} + z^4 \sin^2 (x,z) = 0,$$

équation qui est identique avec l'équation (5) de M. Ensheim, (p. 351). Mais notre solution a l'avantage de donner une construction assez simple, et de faire voir ce que signifie cette équation du 4e. degré, et pourquoi on l'obtient.

Connoissant de cette manière la direction de la droite ϱ', on connoîtra aussi les angles qu'elle fait avec les axes des coordonnées, et par conséquent les quantités A', B', C' : l'équation $\varrho'^3 = \frac{3V}{F} A'B'C'$ donnera donc la longueur de cette droite.

En lui menant, par son extrémité, un plan perpendiculaire, ce plan retranchera de l'an. le trièdre, formé par les plans coordonnés, une pyramide qui fournit la solution du problême.

On auroit pu parvenir aux équations (h) ou (i) par les considérations suivantes : en cherchant tous les plans qui retranchent de l'angle trièdre des volumes égaux V', on trouve que ces plans sont tous tangens à l'hyperboloïde cubique $xyz = \frac{2V'}{9F}$. Or parmi tous ces plans tangens, c'est celui dont la normale passe par l'origine qui résout notre problême. En exprimant cette condition, on trouve exactement les équations susdites.

Les raisonnemens que nous venons de faire, en prenant pour origine des coordonnées le sommet d'un des angles trièdres de la pyramide proposée, pourroient se faire aussi en prenant pour origine l'un quelconque des trois autres sommets. Le problême est donc généralement susceptible de quatre *minima* relatifs ; mais on obtiendra le *minimum* absolu, en prenant pour origine le sommet du plus petit angle trièdre, parce que dans ce cas la droite ϱ' devient un *maximum* absolu, comme il est aisé de s'en convaincre par notre analyse.

Des arêtes de rebroussement des surfaces, enveloppes de l'espace parcouru par une surface mobile du second dégré.

Par M. Livet, *répétiteur à l'Ecole impériale Polytechnique.*

En représentant par α et φ, les coordonnées courantes d'une courbe plane située dans le plan des xy; l'équation de l'ellipsoïde dont le centre parcourt cette courbe, sera de la forme

$$M(x-\alpha)^2+N(y-\varphi)^2+Pz^2=1.$$

Désignant ensuite par φ', φ'' les coefficiens différentiels $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}$, on aura, pour l'arête de rebroussement, les équations suivantes

$$\begin{aligned}
M(x-\alpha)^2+N(y-\varphi)^2+Pz^2 &= 1\\
M(x-\alpha)+N(y-\varphi)\varphi' &= 0\\
-M-N\varphi'^2+N(y-\varphi)\varphi'' &= 0.
\end{aligned}$$

L'élimination de α entre ces trois équations conduira à deux équations en x, y, z, appartenant à l'arête de rebroussement.

De ces trois équations, on en conclut facilement celles-ci

$$y-\varphi=\frac{M+N\varphi'^2}{N\varphi''}$$

$$x-\alpha=\frac{(M+N\varphi'^2)\varphi'}{M\varphi''}$$

$$Pz^2=\frac{MN\varphi''^2-(M+N\varphi'^2)^3}{MN\varphi''}.$$

Quand la surface est de révolution, on a $M=N$; ce qui donne $Pz^2=1-8am\varphi$, et $y=-\varphi$.

L'élimination de φ nous donnera l'équation $Pz^2=1+8amy$.

Ce qui prouve que la projection sur le plan des yz de l'arête de rebroussement, est une parabole ordinaire.

Nous allons passer maintenant à la considération de cette arête de rebroussement, indépendamment de la nature de la courbe directrice.

En désignant par $2a$, $2b$, $2c$ les trois axes d'un ellipsoïde, on a pour l'équation de cette surface (*Mémoire de MM. Monge et Hachette*).

$$a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Cette surface devant se mouvoir sans tourner sur elle-même, il s'ensuit que, si on mène par un point quelconque de l'enveloppée considérée dans sa position primitive, un plan tangent, ce plan devra avoir dans une nouvelle position de l'enveloppée, une situation parallèle à la première, le point de contact conservant d'ailleurs sa hauteur au-dessus du plan des xy. En désignant donc par x, y, z les coordonnées d'un point de la surface dans sa première situation, et par x', y', z' celles du point correspondant dans une nouvelle position, et par p, q les coefficiens différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, on exprimera algébriquement que la surface ne tourne pas sur elle-même par les équations suivantes

$$z = z', \quad p = \frac{dz'}{dx'}, \quad q = \frac{dz'}{dy'};$$

mais de l'équation de la surface mobile, on tire

$$\frac{dz'}{dx'} = -\frac{c^2 x'}{a^2 z'}, \quad \frac{dz'}{dy'} = -\frac{c^2 y'}{b^2 z'}.$$

On aura donc

$$p = -\frac{c^2 x'}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y'}{b^2 z}$$

d'où

$$x' = -\frac{a^2 pz}{c^2}, \quad y' = -\frac{b^2 qz}{c^2}.$$

Substituant, pour ces coordonnées, leurs valeurs dans l'équation de l'enveloppée, on aura

$$z^2 (c^2 + a^2 p^2 + b^2 q^2) = c^4$$

qui est l'équation aux différences partielles du premier ordre de la surface enveloppe; mais avant de la traiter, nous allons y parvenir par une autre considération.

L'équation de la surface mobile étant

$$a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 (y - \varphi)^2 + b^2 c^2 (x - \alpha)^2 = a^2 b^2 c^2,$$

on obtient par la différentiation

$$\left.\begin{array}{l} c^2(x-\alpha)+a^2zp=0 \\ c^2(y-\phi)+b^2zq=0 \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} x-\alpha=-\dfrac{a^2zp}{c^2} \\ y-\varphi=-\dfrac{b^2zq}{c^2} \end{array}\right.$$

En substituant les valeurs de $x-\alpha$, $y-\varphi$ dans l'équation de la surface mobile, on aura

$$a^2z^2p^2+b^2z^2q^2+c^2z^2=c^4$$

ou

$$z^2(c^2+a^2p^2+b^2q^2)=c^4.$$

Cela posé, déterminons l'équation de l'arête de rebroussement, que nous déduirons au moyen de la caractéristique. Or en représentant par $F(p,q)=0$ l'équation aux différences partielles d'une enveloppe quelconque, en la différentiant par rapport aux quantités p et q seulement, on obtient une équation de la forme $Pdp+Qdq=0$, et on sait que l'équation de la caractéristique est $Pdy-Qdx=0$.

Dans l'enveloppe que nous considérons nous avons

$$P=a^2p\ldots\ldots\ Q=b^2q.$$

L'équation $Pdy-Qdx=0$ deviendra donc dans le cas actuel

$$a^2pdy-b^2qdx=0.$$

Eliminant les quantités p et q entre les trois équations

$$\begin{aligned} z^2(c^2+a^2p^2+b^2q^2)&=c^4 \\ a^2pdy-b^2qdx&=0 \\ dz=pdx+qdy&, \end{aligned}$$

on aura une équation aux différentielles ordinaires appartenant à l'arête de rebroussement.

Les deux dernières donnent facilement

$$p=\frac{a^2dydz}{b^2dx^2+a^2dy^2}$$

$$q=\frac{b^2dxdz}{b^2dx^2+a^2dy^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la première équation, on aura, réduction faite,

$$z^2(b^2c^2dx^2+a^2c^2dy^2+a^2b^2dz^2)=c^2(b^2c^2dx^2+a^2c^2dy^2).$$

Cette arête de rebroussement est susceptible d'une construction simple. Supposons d'abord la surface de révolution autour de l'axe des z, on aura alors $a=b$, ce qui réduira l'équation ci-dessus à

$$z^2(a^2dz^2+c^2(dx^2+dy^2))=c^4(dx^2+dy^2).$$

Nous allons faire voir que cette équation appartient à la courbe méridienne recourbée sur une surface cylindrique verticale à base quelconque. En effet, l'équation de la courbe méridienne est

$$c^2x^2+a^2z^2=a^2c^2.$$

En recourbant l'axe des x sur une courbe quelconque tracée dans le plan horisontal, une abscisse x comprendra un certain axe s sur cette courbe, et entre les quantités z et s, on aura encore la relation

$$c^2s^2+a^2z^2=a^2c^2;$$

d'où

$$c^2sds=-a^2zdz,$$

éliminant s et ds, on aura

$$c^2\times\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}\times\sqrt{dx^2+dy^2}=-a^2zdz,$$

ou

$$c\sqrt{c^2-z^2}\times\sqrt{dx^2+dy^2}=-azdz.$$

Carrant, on aura,

$$c^2(dx^2+dy^2)(c^2-z^2)=a^2z^2dz^2;$$

d'où enfin

$$z^2(a^2dz^2+c^2(dx^2+dy^2))=c^4(dx^2+dy^2).$$

Il est donc prouvé par ce calcul, que dans le cas de la surface ellipsoïde de révolution, l'arête de rebroussement relative à l'enveloppe n'est autre chose que la courbe méridienne recourbée sur une surface cylindrique verticale à base quelconque.

De l'équation

$$z^2(a^2dz^2+c^2(dx^2+dy^2)=c^4(dx^2+dy^2);$$

on peut retourner facilement à l'équation plus générale

$$z^2(a^2b^2dz^2+b^2c^2dx^2+a^2c^2dy^2)=c^2(b^2c^2dx^2+a^2c^2dy^2).$$

Il suffira, dans la première, de substituer pour y l'expression $\frac{a}{b}y'$, ce qui fournit, dans le cas de l'ellipsoïde quelconque, une construction très-simple de l'arête de rebroussement dont voici l'énoncé.

Recourbez sur une surface cylindrique verticale à base quelconque l'ellipse intersection de l'enveloppée par le plan des xz; concevez ensuite par la courbe à double courbure qui résulte de cette opération, une surface cylindrique horisontale perpendiculaire au plan des xz; concevez ensuite une courbe dans le plan horisontal dont les ordonnées y' soient aux ordonnées correspondantes de la courbe qui sert de base à la surface cylindrique verticale dans le rapport constant de b à a; cette courbe ainsi construite sera la base d'une surface cylindrique verticale contenant l'arête de rebroussement : en sorte que cette ligne sera celle d'intersection de cette surface cylindrique verticale avec la surface cylindrique horisontale. Il est encore à remarquer que si dans l'équation

$$z^2(a^2b^2dz^2+a^2c^2dy^2+b^2c^2dx^2)=c^2(b^2c^2dx^2+a^2c^2dy^2),$$

on suppose $z=\frac{a}{c}z'$ et $y=\frac{b}{c}y'$, on la réduira à

$$z^2(dz^2+dy^2+dx^2)=a^2(dx^2+dy^2),$$

qui correspond à un cercle de rayon a recourbé sur une surface cylinorique à base quelconque. Prenons maintenant pour enveloppée l'hyperboloïde à une nappe dont l'équation est

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

on aura pour équation aux différences partielles de l'enveloppe

$$z^2(a^2p^2+b^2q^2-c^2)=c^4,$$

et pour l'arête de rebroussement

$$z^2(a^2b^2dz^2-b^2c^2dx^2-a^2c^2dy^2)=c^2(b^2c^2dx^2+a^2c^2dy^2);$$

dans le cas où les axes a et b sont égaux, on obtient

$$z^2(a^2dz^2-c^2(dx^2+dy^2))=c^4(dx^2+dy^2).$$

Il seroit facile de vérifier que l'arête de rebroussement est dans ce cas-ci l'hyperbole méridienne recourbée sur une surface cylindrique à base quelconque.

Je n'en dirai pas plus sur l'hyperboloïde, pour passer au paraboloïde dont l'équation est

$$mz^2 + m'y^2 - 4mm'x = 0.$$

En supposant que le sommet de ce paraboloïde se mène sur une courbe tracée sur le plan des yz, on trouve que l'enveloppe a pour équation

$$p^2x - mq^2 = m',$$

et l'arête de rebroussement

$$mxdz^2 = m'(mdx^2 - xdy^2).$$

Lorsque le paraboloïde est de révolution, on a $m = m'$, ce qui réduit l'équation ci-dessus à

$$x(dz^2 + dy^2) = mdx^2.$$

Elle correspond encore à la parabole méridienne recourbée sur une surface cylindrique à base quelconque.

Démonstration analytique de la seconde propriété de la projection stéréographique, énoncée pag. 76 *de cette Correspondance, par* M. Puissant, *professeur de mathématiques à l'École militaire.*

Théorème.

« Dans la projection stéréographique de Ptolémée, deux sections quelconques se coupent toujours sous le même angle que leurs projections. »

M. *Hachette* a donné par la géométrie, dans le n°. précédent, une démonstration simple et élégante de cette propriété. M. Delambre, dans un mémoire très-intéressant qu'il a publié sur la projection stéréographique, (*Mém. de Mathém, de l'Institut*, tome V, page 393) a démontré cette même propriété par une analyse trigonométrique fondée sur les principes du tracé de cette projection. Voici une méthode analytique qui est propre à faire connoître en général le rapport entre l'angle et sa projection, de deux cercles qui se rencontrent sur la sphère.

Sur une surface courbe quelconque, l'angle formé par deux courbes planes qui se coupent, se mesure par l'angle que forment les deux tangentes menées à chacune de ces courbes au point de leur commune section. Relativement à la sphère, on peut toujours mener un plan par son centre et par l'une des tangentes dont il s'agit : alors la section circulaire qui en résulte a pour tangente celle que contient ce plan, et la perspective de cette section est touchée par la perspective de sa tangente.

Cela posé, prenons pour plan des $x z$ celui qui passe par le centre de la sphère, et par le point d'intersection des deux tangentes à sa surface, et plaçons à ce centre l'origine des coordonnées rectangulaires.

Les équations des plans passant par les deux tangentes à la surface de la sphère seront

$$\left.\begin{aligned} z &= Ax + By \\ z &= Ax + B'y \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

et l'on aura respectivement pour les équations des projections stéréographiques des courbes circulaires résultantes des sections de ces plans,

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2Ax + 2By &= 1 \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2B'y &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

le rayon de la sphère étant pris pour unité. (*Voyez* la page 104, ligne 9 de mon *Traité de Topographie*, ou le n°. 4, pag. 80 de cette *Correspondance*.

Si par le point où se coupent ces deux projections, on mène une tangente à chacune, l'angle de ces tangentes sera la perspective de l'angle des tangentes à la sphère ; ainsi, désignant par θ et θ' les angles que les premières tangentes font avec l'axe des x, on trouvera, en différentiant les équations (2) qui ont lieu en même tems,

que la première donne $\quad \operatorname{tang} \theta = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(x+A)}{y+B}$,

et que la seconde donne $\quad \operatorname{tang} \theta' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(x+A)}{y+B'}$.

Ces rapports se réduisent nécessairement à ceux-ci;

$$\tang \theta = \frac{-\sqrt{1+A^2}}{B}, \quad \tang \theta' = \frac{-\sqrt{1+A^2}}{B'};$$

car si l'on soustrait l'une de l'autre les équations, (2) on en obtiendra une nouvelle qui ne pourra être satisfaite, à moins que y ne soit nulle. On a donc $y=0$ et $x=-A\pm\sqrt{1+A^2}$.

Maintenant l'on sait qu'en général

$$\tang(\theta-\theta') = \frac{\tang\theta - \tang\theta'}{1+\tang\theta\tang\theta'};$$

ainsi pour le cas actuel

$$\tang(\theta-\theta') = \frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}.$$

Telle est l'expression de la tangente de la projection de l'angle cherché ; mais cet angle est aussi celui des deux plans (1), puisqu'ils font un angle V, dont le cosinus est

$$\cos V = \frac{A^2+BB'+1}{\sqrt{A^2+B^2+1}\sqrt{A^2+B'^2+1}},$$

$$\text{ou dont } \tang V = \frac{(B-B')\sqrt{1+A^2}}{A^2+BB'+1}.$$

donc, dans la projection stéréographique de Ptolémée, la perspective de l'angle de deux cercles quelconques ne diffère point de l'angle lui-même.

Le calcul précédent aurait été plus simple, si nous eussions supposé une des tangentes dans le plan des $x\,z$; mais nous avons voulu traiter la question dans toute sa généralité.

Nous observerons qu'en appliquant la même méthode aux projections centrale et orthographique des cercles de la sphère, (Voyez le *Traité de Topographie* cité) on parviendroit à ces deux résultats ; savoir :

Que dans la *Projection centrale*, la tangente de l'angle de deux méridiens, dont l'un est le principal, est à la tangente de sa projection, comme le rayon des tables est au sinus de la hauteur du pôle.

Que dans la *Projection orthographique*, les tangentes de ces

deux angles sont précisément dans un rapport inverse du précédent.

N. B. La première proportion démontrée d'une manière très-différente dans tous les traités de Gnomonique, y est énoncée ainsi : pour le cadran horisontal, la tangente de la distance angulaire du soleil au méridien, est à la tangente de l'angle que fait la ligne horaire avec la méridienne, comme le sinus total est à la latitude du lieu.

QUESTIONS *de Minimis*, *par* M. PUISSANT.

L'application de la méthode des *maximis* et *minimis*, insérée dans la *Théorie des Fonctions Analytiques*, page 191, est relative à ce problème : *déterminer la plus courte distance entre deux droites données dans l'espace.* Le célèbre auteur de cet immortel ouvrage donne bien les deux équations qui servent à déterminer les deux inconnues renfermées dans l'expression de la plus courte distance cherchée, mais il n'en conclut pas la propriété dont jouit cette ligne, c'est d'être à la fois perpendiculaire aux deux droites données. Cette propriété étant le fondement de la solution géométrique du problême actuel, je vais la déduire très-simplement de l'analyse même employée par M. Lagrange.

Soient
$$\left.\begin{array}{ll} x = az + \alpha & x' = a'z' + \alpha' \\ y = bz + \beta & y' = b'z' + \beta' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

les équations des projections verticales des deux droites données; la distance entre les deux points $x\,y\,z$, $x'\,y'\,z'$ aura pour expression

$$u = \sqrt{(\alpha - \alpha' + az - a'z')^2 + (\beta - \beta' + bz - b'z')^2 + (z - z')^2} \qquad (2)$$

Cette quantité devant être un *minimum*, il faut que ses différentielles prises successivement par rapport à z et z' soient nulles : ainsi on aura pour déterminer ces deux ordonnées verticales, les équations

$$\frac{du}{dz} = (z - z') + a\,(\alpha - \alpha' + az - a'z') + b\,(\beta - \beta' + bz - b'z') = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{du}{dz'} = (z - z') + a'(\alpha - \alpha' + az - a'z') + b'(\beta - \beta' + bz - b'z') = 0 \qquad (4)$$

Il est d'abord facile de s'assurer que ces équations répondent au *minimum* demandé, car on trouverait que la condition

$$\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dz'^2}-\left(\frac{d^2u}{dzdz'}\right)^2>0$$

est remplie; ensuite pour parvenir à la propriété énoncée, on observera que la droite *minimum* devant passer par les points $x\,y\,z$, $x'\,y'\,z$, ses équations sont de la forme

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a''(z-z') \\ y-y'=b''(z-z') \end{array}\right\} \qquad (5)$$

ou à cause des valeurs de x, x'; y, y' tirées des équations (1), on a

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha-\alpha'+az-a'z')=a''(z-z') \\ (\beta-\beta'+bz-b'z')=b''(z-z') \end{array}\right\} \qquad (5') \quad :$$

de là les formules (3) et (4) se réduisent respectivement à

$$1+aa''+bb''=0, \qquad 1+a'a''+b'b''=0.$$

Ces relations expriment donc que la droite *minimum* est en même tems perpendiculaire aux deux droites données, et l'on en tire

$$a''=\frac{b'-b}{a'b-ab'}, \quad b''=\frac{a-a'}{a'b-ab'}. \qquad (6)$$

maintenant si on résout les deux équat. (3) et (4) par rapport aux inconnues z, z' on obtiendra

$$z-z'=-\frac{(a'b-ab')\{(b-b')(\alpha-\alpha')-(a-a')(\beta-\beta')\}}{(a-a')^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2};$$

mais l'expression (2) devient, en vertu des formules (5) et (6),

$$u=\frac{(z-z')}{a'b-ab'}\sqrt{(-a')^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2};$$

et en y substituant pour z, z' sa valeur précédente, on a

$$u=-\frac{(b-b')(\alpha-\alpha')-(a-a')(\beta-\beta')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(a'b-ab')^2}};$$

résultat conforme à celui auquel on parvient par des considérations

purement élémentaires. (Voyez l'*Appl. de l'alg. à la géom. des surfaces*, par MM. Monge et Hachette. Prob. IV).

Dans la question précédente, les plans coordonnés sont situés d'une manière quelconque par rapport aux droites données, mais il est des cas où telle position de ces plans, à l'égard des objets que l'on considère dans l'espace, est plus propre que toute autre pour mettre en évidence certaines propriétés de l'étendue. Supposons par exemple qu'il faille *déterminer la route la plus courte pour aller d'un point à un autre, en passant par un plan donné de position à l'égard de ces points.*

Cette proposition est susceptible d'une solution fort simple en prenant pour plan des $x\,y$ le plan donné, et pour celui des $x\,z$, le plan qui passe par les deux points donnés. En effet, dans cette hypothèse admissible, les coordonnées du point M' (fig. 1, pl. 2), sont

$$x = x', \; y = 0, \; z = z'$$

celles de l'autre point M'' sont

$$x = x'', \; y = 0, \; z = z'';$$

et en supposant pour un moment que le point N du plan $x\,y$ soit celui qui satisfait au *minimum* demandé, point dont les coordonnées sont x et y, on aura

$$M'N + M''N = \sqrt{(x - x')^2 + y^2 + z'^2}$$
$$+ \sqrt{(x - x'')^2 + y^2 + z''^2} = \sqrt{P} + \sqrt{P'}.$$

comme les variables x et y sont indépendantes, les différentielles successives de cette expression donneront

$$\frac{x - x'}{\sqrt{P}} + \frac{x - x''}{\sqrt{P'}} = 0$$

$$\frac{y}{\sqrt{P}} + \frac{y}{\sqrt{P'}} = 0$$

pour que cette dernière équation soit satisfaite, il faut que y soit nulle; ainsi la route la plus courte demandée est $M'\,N' + N'\,M''$, c'est-à-dire, qu'elle est toute entière dans un plan perpendiculaire au plan donné $x\,y$. Alors l'avant-dernière équation se réduit à

$$\frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + z'^2}} = \frac{x'' - x}{\sqrt{(x'' - x)^2 + z''^2}};$$

donc cos $M' N' A =$ cos $M'' N' X$; donc les deux lignes $M' N'$, $N' M''$ font le même angle avec le plan xy, ou avec sa perpendiculaire $N' R$, comme on le démontre d'une autre manière en mécanique.

Note sur les surfaces du second degré, *par* M. HACHETTE.

Nous avons donné comme une propriété générale des surfaces du second degré, la double génération de ces surfaces par un cercle; nous avons démontré que pour chaque système de génération, le plan du cercle mobile est parallèle à lui-même, et que la droite, parcourue par le centre de ce cercle est un diamètre de la surface; lorsque la surface n'a pas de centre, nous avons démontré qu'elle devenoit ou un paraboloïde *elliptique* ou un paraboloïde *hyperbolique;* pour ce dernier paraboloïde, la génération par le cercle est impossible; cette observation n'a pas échappé à M. Berthot, (1) ancien élève, professeur au lycée de Dijon; ce géomètre démontre par l'analyse, qu'on ne peut pas tracer sur le paraboloïde hyperbolique, une courbe plane fermée; on peut aussi le démontrer fort simplement par la géométrie; en effet, la droite mobile qui engendre le paraboloïde, a pour directrices deux droites, et se meut en restant constamment parallèle à un plan fixe; or, étant donné un autre plan quelconque qui coupe le plan fixe suivant une droite (que j'appelle D), le plan mené par une parallèle à cette droite, et la première directrice, coupera la seconde directrice en un point, par lequel, si on mène une parallèle à la droite D, cette parallèle sera toute entière sur la surface; elle sera, de plus, parallèle au plan qu'on a supposé mené d'une manière quelconque; donc, si on considère ce dernier plan comme un plan sécant du paraboloïde, il y aura toujours une position de la génératrice de cette surface, pour laquelle le plan sécant lui sera parallèle; donc la section que renferme ce plan, ne peut jamais être une courbe fermée, puisque la génératrice et le plan qui lui est parallèle ne se coupent qu'à l'infini.

---

(1) M. Berthot a déja formé, pour l'Ecole Polytechnique, un grand nombre d'élèves très-distingués, qui justifient la réputation dont sa maison d'éducation jouit depuis longtems.

GÉOMETRIE.

Sur la surface gauche du second degré.

(On appelle ainsi la surface qui a pour génératrice, une ligne droite dirigée dans son mouvement par trois droites fixes sur lesquelles elle s'appuie.)

«En admettant que l'équation de cette surface soit du second degré, il est bien évident qu'un plan passant par une génératrice considérée dans une position quelconque, et tournant sur cette droite comme axe, coupera toujours la surface suivant le système de deux droites; car en général la section plane est une courbe du second degré, et cette courbe ne peut être remplacée que par le système de deux droites; on conclut de cette proposition que la surface gauche du second degré peut être engendrée par une droite de deux manières; qu'une génératrice quelconque d'un système de génération coupe toutes les génératrices du second système; qu'il n'y a aucun point de cette surface pour lequel on ne puisse y mener deux droites, et qu'enfin le plan tangent en ce point passe par ces deux droites; j'ai fait voir comment on arrive du plan tangent de cette surface au plan tangent de la surface qui enveloppe l'espace que parcourt une droite qui s'appuie sur trois courbes quelconques; l'usage fréquent de toutes ces propositions dans les applications de la géométrie descriptive faisoit encore desirer la solution du problême que j'ai proposé dans le dernier numéro.»

«Construire avec la ligne droite et le cercle, le point d'intersection d'une droite donnée et de la surface gauche du second degré.»

On trouvera ci-après deux solutions de ce problême, ainsi qu'une solution particulière fort élégante, pour le cas où la surface gauche du second degré devient un hyperboloïde de révolution. H. C.

Solution de M. Brianchon, *officier d'artillerie.*

« Après avoir mené à volonté deux élémens (1) de la surface
« gauche, je fais passer, par la droite donnée, un plan vertical
« qui coupe la surface suivant une section conique, dont je dé-

(1) On entend ici par *élément* une droite qui correspond à une des positions de la génératrice de la surface.

« termine cinq points en cherchant l'intersection de ce plan, « d'abord avec les trois directrices connues, et ensuite avec les « deux élémens arbitraires Cela fait, je rabats le plan vertical « avec la droite et les cinq points qu'il contient, et le problême « proposé se réduit à celui-ci :

« Déterminer rigoureusement l'intersection d'une droite donnée « (MM'), pl. 2, fig. 2., avec une courbe du second ordre dont « on connoît cinq points quelconques A, B, C, D, E. »

« Si la droite MM' passoit par l'un des cinq points donnés, on « obtiendroit sur-le-champ le second point où elle couperoit la « courbe, (8ᵉ. nᵒ. de la Correspondance, page 310, fig. 7,) et « même, dans ce cas, la question seroit si simple, qu'elle n'exige-« roit absolument d'autre opération que celle de faire passer une « ligne droite par deux points connus. »

« Menant donc par E et A des parallèles à la droite donnée, je « détermine par la construction citée, les points F, f, où ces pa-« rallèles vont rencontrer la section conique; ensuite je joins les « milieux de EF et Af pour une droite indéfinie qui coupe MM' « au point c. »

« Soit ensuite P le point de concours de la droite donnée avec « la corde BC, prolongée s'il le faut; je tire la droite indéfinie « PA sur laquelle je cherche, comme précédemment le point de « rencontre f' avec la courbe. Effectuant alors sur le quadrilatère « $ABCf'$ la construction indiquée par la figure, j'obtiens sur MM', « un troisième point O, tel qu'en prenant $cM = cM' = \sqrt{cO.cP}$, « les deux points M, M', appartiennent à la section conique. « (13ᵉ. cahier du Journal de l'École polytechnique.)

« Cette dernière partie de la solution repose sur ce que la droite « de construction qui détermine O, étant dérivée du point P, « divise chacune des cordes qui concourent en P en deux segmens « proportionnels à ceux que ce point forme sur la même corde; « en sorte que, pour MM' par exemple, on doit avoir « $OM : OM' :: PM : PM'$: de plus, par construction, EF, « MM', Af sont parallèles entre elles, et partant le point c est le « milieu de la corde MM', donc la proportion précédente peut « être mise sous cette forme :

$$cM - cO : cM + cO :: cP - cM : cP + cM,$$

et transformée ensuite en cette autre

$$2\,cM : 2\,cO :: 2\,cP : 2\,cM.$$

« Dans le cas où la droite donnée ne feroit que toucher la sec-
« tion conique, les quatre points c, O, M, M' se réuniroient en
« un seul qui seroit le point de contact cherché. Il pourroit encore
« arriver que cette droite ne rencontrât pas la courbe, et l'on
« seroit averti de cette circonstance, parce qu'alors le point c
« se trouveroit placé entre les deux points O et P.

Solution de M. Petit, *élève*.

L'équation de la surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites, étant du second degré; si l'on élimine entre cette équation, et celle d'une ligne-droite, on obtient évidemment une équation du second degré, dont les racines peuvent se construire avec la ligne droite et le cercle. Nous allons y parvenir par des considérations purement géométriques.

Soient pour abréger, A, B, C, les trois génératrices et X la droite donnée. Par la droite A, par exemple, je mène un plan parallèle à X, et par cette dernière, un plan parallèle à A. J'appellerai le premier plan P; et le second P'; le plan P coupera évidemment la surface, suivant deux génératrices; l'une sera A; l'autre s'obtiendra en cherchant l'intersection du plan P' avec B et C; et réunissant les deux points d'intersection, on aura une nouvelle génératrice D, qui rencontrera A. Le plan P' coupera la même surface suivant une courbe du second degré dont nous allons déterminer la nature.

Si l'on vouloit construire cette dernière courbe par points, il faudroit chercher l'intersection de ce plan avec chacune des génératrices; or, les deux génératrices A et D sont parallèles au plan P', la courbe a donc des branches infinies qui s'approchent continuellement des droites A et D sans les pouvoir atteindre. C'est donc une hyperbole dont nous allons chercher les asymptotes. Pour obtenir ces asymptotes, il faut se rappeler, (*voyez* pag. 244 et 368 de cette Correspondance,) que devant être des tangentes à l'infini, elles toucheront la courbe en des points situés sur les génératrices A et D. Cherchons donc les plans tangens à la surface, pour les points situés à l'infini sur les droites A et D. Commençons par la droite A. Le plan tangent au genre de surfaces que nous considérons, s'obtient pour un point donné, en cherchant les deux génératrices, et en menant un plan par ces deux droites; par conséquent, pour avoir le plan tangent au point situé à l'infini sur la droite A, il suffira de trouver une autre génératrice parallèle à A.

On obtiendra cette seconde droite en menant par B et par C, deux plans parallèles à A, qui se couperont suivant une parallèle à A, et qui déterminera avec cette dernière droite A, le plan cherché. On opérera de même pour la génératrice D; seulement on aura soin pour cette dernière, de choisir deux nouvelles génératrices, en prenant pour directrices les trois droites A, B, C; ayant obtenu ces deux plans tangens à l'infini, on cherchera les droites suivant lesquelles ils coupent le plan P'. Ces droites seront les asymptotes de la courbe intersection du plan P' et de la surface gauche. On pourra facilement obtenir un point de cette courbe, par l'intersection du plan P' avec une génératrice. Le problême est donc ramené au suivant : « Etant donnés les asymptotes et un « point d'une hyperbole, trouver l'intersection de cette courbe avec « une droite située dans son plan ? »

Soient AB et $A'B'$ (fig. 3.) les asymptotes et un point donné de la courbe. Soit encore XY la droite dont il faut trouver l'intersection avec l'hyperbole. Si par le centre Z on mène la droite CL, partageant l'angle des asymptotes en deux parties égales et de manière à ce qu'elle ne coupe pas l'hyperbole, on aura l'axe imaginaire de la courbe; supposons maintenant que la courbe tourne autour de cet axe, elle engendrera un hyperboloïde; le point M décrira un cercle qui sera en projection horisontale, le cercle dont C est le centre, et CV le rayon; or, cette surface, comme on le sait, peut être engendrée par le mouvement d'une droite, et, de plus, parmi toutes les positions de la génératrice, il y en a une qui est en projection horisontale, parallèle à la ligne de terre, et qui en projection verticale, se confond avec une quelconque des asymptotes. Pour avoir la projection horisontale de cette génératrice particulière, il suffit d'observer que l'asymptote AB coupe le cercle décrit par le point M, au point dont les projections sont O et P. Les projections de la génératrice que je considère, sont donc AB et QPR ou $A'B'$ et PQR. Dans le même mouvement, la droite XY décrit un cône dont le sommet est en I, et dont la base est le cercle $YQRT$. Cherchons l'intersection du cône et de l'hyperboloïde. Cette intersection est composée de deux cercles qui, en projection, auront leurs centres au point C; il suffit donc de trouver un point de chacun de ces cercles; pour y parvenir, nous chercherons l'intersection de la génératrice que nous connaissons, avec le cône; ce qui s'obtiendra, en menant par la génératrice et le sommet du cône, un plan dont la trace sera UT. Ce plan coupera le cône suivant les deux arêtes CT et CU, qui couperont la génératrice aux points D et E; remettant ces points en projection sur la droite AB, puis

concevant par ces nouveaux points, des plans horisontaux qui contiendront les cercles cherchés ; ces plans couperont la droite XY aux points H et K qui seront les points cherchés.

Lorsque la surface, au lieu d'être la surface gauche générale du second degré, est un hyperboloïde de révolution, le problème est alors très-simple et se ramène aisément au problème de l'intersection d'une droite et d'une hyperbole, problême dont nous avons indiqué la solution.

En effet, soit LM (fig. 4.) la ligne de terre, AB et $A'B'$ les projections de la génératrice ; O le pied de l'axe ; XY et $X'Y'$ les projections de la droite donnée, que je suppose ici ramenée parallélement au plan vertical ; ce plan coupera la surface suivant une hyperbole dont nous allons chercher les asymptotes et les axes. Il est d'abord clair que les asymptotes seront AB et son homologue CD. Pour avoir l'axe réel, il peut se présenter deux cas, ou que le point O soit plus près de $A'B'$ que de $X'Y'$, ou qu'il en soit plus éloigné ; soit d'abord $X'Y'$ plus près ; cette droite coupera le cercle de gorge en deux points C et D, qui mis en projection en P et Q, donneront PQ pour petit axe ; dans le second cas, l'axe réel doit être dans le sens de EF. Pour le trouver, on remarque que les sommets sont en projection en G ; les cercles correspondans couperont la génératrice aux points H et K en projection horisontale, H' et K' en projection verticale. Les cercles qui contiennent les sommets, seront donc en projection verticale $H'S$ et $K'T$; les sommets seront donc S et T.

Problême. Trouver l'intersection d'une droite donnée et d'un hyperboloïde de révolution, c'est-à-dire, engendré par la rotation d'une droite autour d'un axe ; par M. Duleau, *élève*.

Soit projetté horisontalement en C (fig. 5.) l'axe que nous supposons vertical ; AB, ab sont les projections de la génératrice de l'hyperboloïde, et fg, FG celles de la droite donnée.

Le point d'intersection que nous cherchons, est à la fois sur la droite donnée et sur la génératrice dans une de ses positions. Sur toutes les deux, il est à même hauteur et à même distance de l'axe ; mais par la nature de la génération de la surface, chaque point de cette génératrice a toujours la même hauteur et la même distance à l'axe ; si, de plus, nous supposons que la droite (fg, FG) tourne autour du même axe jusqu'à ce que sa projection horisontale eh soit parallèle à la ligne de terre, le point que nous cherchons sur cette droite, n'aura encore changé ni de hauteur ni de distance à l'axe.

Voici donc le problême qu'il s'agit de résoudre, étant données les deux droites (eh, EH) et (ab, AB), décrire du point C comme centre un arc de cercle KN, qui coupe AB en un point N et eh en un point K, de sorte qu'en élevant les perpendiculaires NT jusqu'à la rencontre de ab, et KV jusqu'à celle de EH, on ait $ST=UV$; alors N, T et K, V seront les projections de points à même hauteur et à même distance de l'axe sur les deux droites; menant l'horisontale VTX jusqu'à la rencontre de fg, on aura la projection verticale du point cherché.

Supposons ce dernier problême résolu, on a par les triangles semblables TSb, QRb, $TS : Sb :: QR : Rb$; par les triangles semblables VUH, QRH on a $VU : UH :: QR : RH$: mais par hypothèse $ST=UV$. Donc on a $Sb : UH :: Rb : RH$; $Sb=NB$; $UH=Kh$, et si par les deux points (B, h), on mène Bh jusqu'à la rencontre de NK en P, on pourra remplacer le rapport de NB à Kh par celui de PB à Ph, on aura donc $PB : Ph :: Rb : RH$, ce qui nous apprend que le point P; un des points qui détermineront la droite KN, est à l'intersection de Bh et de la perpendiculaire à la ligne de terre abaissée par le point Q.

Si du point C j'abaisse une perpendiculaire CO sur PKN, elle partagera KN en deux parties égales, donc le point O est sur une droite YY', équidistante aux deux parallèles AB, eh; comme l'angle COP est droit, il est sur une circonférence décrite sur CP comme diamètre; je mène cette droite YY', je décris cette circonférence. Elles se coupent généralement en deux points, O et O'; par chacun de ces points et par le point P, je mène des droites qui coupent AB aux points N et N', eh en un autre K'; ces points sont tous deux des projections horisontales de points à même hauteur et à même distance de l'axe; je mets un de ces points K, par exemple, en projection verticale V, je mène l'horisontale VX, X est la projection verticale d'un des points cherchés, qu'on peut mettre en projection horisontale Z.

Si la droite YY' et le cercle dont CH est le diamètre, se coupent en deux points, la droite donnée aura deux points communs avec l'hyperboloïde; s'ils sont tangens, elle n'en aura qu'un; s'ils n'ont aucun point commun, la droite n'en aura pas avec l'hyperboloïde.

Si par un point d'intersection de la droite avec l'hyperboloïde, nous menons une génératrice de la surface, le plan qui passera par ces deux droites lui sera tangent; nous avons donc, par ce moyen, la solution de ce problême, « mener par une droite donnée « un plan tangent à l'hyperboloïde de révolution. »

Sur quelques propriétés de la pyramide triangulaire ;

Par M. MONGE.

Les sommets des quatre angles d'une pyramide triangulaire quelconque étant A, B, C, D, si on les réunit trois à trois de toutes les manières possibles par des plans, on a les quatre faces

$$ABC,\ DAB,\ CDA,\ BCD;$$

si on les réunit deux à deux par des droites de toutes les manières possibles, on a les six arêtes

$$AB,\ CA,\ BC,$$
$$CD,\ BD,\ AD.$$

Une quelconque des six arêtes étant prise à volonté, et passant par deux des quatre sommets, il y en a toujours une autre qui passe par les deux autres sommets, et qui n'ayant aucun point commun avec la première, ne peut pas être comprise avec elle dans un même plan. On peut regarder ces deux arêtes comme *opposées* entre elles.

Dans la manière dont nous venons d'écrire les six arêtes, nous avons placé l'une au-dessus de l'autre celles qui sont opposées.

Si, par deux arêtes opposées quelconques, on fait passer deux plans parallèles entre eux, ces deux plans, dont la position sera déterminée, comprendront entre eux toute la pyramide; si donc on en fait autant pour les deux autres systèmes d'arêtes opposées, on aura six plans parallèles entre eux deux à deux, et qui comprendront un parallélipipède déterminé, circonscrit à la pyramide.

Des sommets des huit angles du parallélipipède circonscrit, quatre sont placés aux sommets de la pyramide, les quatre autres sont diagonalement opposés aux premiers : et les six arêtes de la pyramide sont chacune une diagonale d'une des six faces du parallélipipède circonscrit : enfin, les distances des faces parallèles du parallélipipède sont respectivement égales aux plus courtes distances des faces opposées de la pyramide.

Cela posé, *la solidité de toute pyramide triangulaire est le tiers de celle du parallélipipède circonscrit* (1).

Si les deux arêtes opposées d'un des trois systèmes sont égales

(1) On propose de donner la démonstration de ce théorème.

entre elles, les deux diagonales d'une des trois faces différentes du parallélipipède circonscrit sont de même égales entre elles; et cette face est rectangulaire.

Si les arêtes opposées d'un second système sont aussi égales entre elles, quoiqu'elles ne le soient pas à celles du premier, une seconde des trois faces différentes du parallélipipède circonscrit est rectangulaire.

Si les arêtes opposées des trois systêmes sont respectivement égales entre elles, le parallélipipède circonscrit est restangulaire; les droites sur lesquelles se mesurent les trois distances des arêtes opposées, partagent toutes ces arêtes en deux parties égales, et passent toutes trois par un même point, qui est le centre commun de la pyramide et du parallélipipède circonscrit. Dans ce cas, la solidité de la pyramide est le tiers du produit des trois distances de ses arêtes opposées.

Pour le tétraèdre régulier, dont les six arrêtes sont toutes égales entre elles, le parallélipipède circonscrit est un cube. Les diagonales des carrés qui servent de faces à ce cube, sont égales aux arêtes du tétraèdre; ainsi en nommant a la longueur commune de ces arêtes, le côté du cube, et par conséquent la distance des arêtes opposées est $\frac{a}{\sqrt{2}}$, la solidité du tétraèdre est $\frac{a^3}{2\sqrt{2}}$, ce qui se trouve dans les élémens.

Lorsqu'un parallélipipède est circonscrit à une pyramide triangulaire quelconque, chacune des arêtes de la pyramide est une des deux diagonales d'une des faces du parallélipipède. Si sur chacune de ces faces on mène les secondes diagonales, elles seront les arêtes d'une seconde pyramide qui sera aussi inscrite dans le même parallélipipède, et dont la solidité sera également le tiers de celle du parallélipipède. Ainsi une pyramide triangulaire n'a qu'un seul parallélipipède circonscrit; mais tout parallélipipède a deux pyramides inscrites qui sont égales entre elles, et qui ne sont point semblables l'une à l'autre: on peut les regarder comme conjuguées.

De deux pyramides conjuguées, l'une étant donnée, il est facile de former l'autre; pour cela, il n'y a qu'à mener par le milieu de chacune des six arêtes de la première, une droite parallèle à l'arête opposée, et ces six droites seront les arêtes de la seconde.

Les deux pyramides conjuguées et inscrites dans leur parallélipipède circonscrit commun, se pénètrent, et ont une partie com-

mune que nous pouvons appeler *noyau* ; chacune des deux pyramides excède le noyau par chacun de ses angles, et chacune des parties excédentes est une pyramide semblable à celle dont elle fait partie ; mais ses arêtes sont la moitié de celles qui leur correspondent dans la pyramide entière ; donc sa solidité n'est que le 8e. de la pyramide entière. Donc la solidité de chacune des huit pyramides qui excèdent le noyau est $\frac{1}{24}$ de celle du parallélipipède circonscrit.

Si à la solidité d'une des pyramides conjuguées qui vaut $\frac{8}{24}$ on ajoute celles des quatre pyramides excédentes de l'autre, on aura $\frac{12}{24}$ pour la mesure de l'espace que les deux pyramides conjuguées occupent dans le parallélipipède. Ainsi elles occupent ensemble la moitié du volume du parallélipipède. Si d'une même pyramide on retranche ses quatre parties excédentes, on aura pour la solidité du noyau $\frac{4}{24}$; ainsi la solidité du noyau est le $\frac{1}{6}$ de celle du parallélipipède, et la moitié de celle d'une des pyramides inscrites ; enfin, les deux pyramides inscrites laissent dans le parallélipipède autant de petites pyramides vides qu'il y a d'arêtes dans le parallélipipède ; ces douze petites pyramides sont égales entre elles, quoique non semblables, et la solidité de chacune d'elles, est le 24e. de celle du parallélipipède.

Si dans un parallélipipède circonscrit à une pyramide quelconque, on inscrit la surface d'un ellipsoïde, cette surface, qui est déterminée, touche les six faces du parallélipipède chacune dans son centre, et par conséquent touche les six arêtes de la pyramide chacune dans son milieu. Ainsi une pyramide quelconque étant donnée, l'ellipsoïde inscrit aux six arêtes de cette pyramide est déterminé, et les droites qui sont menées par les milieux des arêtes opposées sont trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Quand les arêtes opposées de la pyramide sont respectivement égales entre elles, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées sont perpendiculaires à ces arêtes, et deviennent leurs distances ; ces trois droites se coupent en un même point par leurs milieux ; elles sont rectangulaires entre elles, et elles sont les trois axes de l'ellipsoïde. Dans le tétraèdre régulier, l'ellipsoïde inscrit aux six arêtes, est une sphère dont le rayon est égal à la distance des arêtes opposées.

On sait que les surfaces du 2e. degré se réduisent à trois espèces ;

La 1re. a six sommets réels, c'est l'ellipsoïde ;

La 2e. n'a que quatre sommets réels ; les deux autres étant imaginaires. C'est l'hyperboloïde à une nappe ;

La 3^{e}. n'a que deux sommets réels; les quatre autres étant imaginaires, c'est l'hyperboloïde à deux nappes.

Si l'on suppose que ces trois surfaces soient conjuguées entre elles, c'est-à-dire, qu'elles soient concentriques, que leurs trois axes, respectivement égaux entre eux, coïncident, et que, de plus, les deux sommets imaginaires de la seconde, soient les seuls réels de la troisième; les trois surfaces coexistent dans l'espace sans se couper nulle part; la première touche la seconde dans sa ligne de striction qui passe par les quatre sommets communs; elle touche la troisième dans les deux seuls sommets communs; et la seconde touche la troisième dans une ellipse placée à une distance infinie. Tout cela est susceptible de trois combinaisons, suivant l'axe sur lequel sont pris les deux sommets qui sont réels dans la 3^{e}. surface.

Ce que nous venons de dire pour les trois surfaces du second degré, rapportées à leurs axes rectangulaires communs, a lieu d'une manière analogue, si ces surfaces sont rapportées à trois diamètres conjugués communs. La seule différence est qu'ici ce sont les extrémités des diamètres conjugués qui font les fonctions des sommets.

D'après cela, lorsqu'un ellipsoïde est inscrit entre les six arêtes d'une pyramide triangulaire quelconque; en rapportant cet ellipsoïde aux trois droites menées par les milieux des arêtes opposées, et qui sont trois diamètres conjugués; si l'on conçoit les deux autres surfaces du 2^{e}. degré qui lui sont conjuguées et rapportées aux mêmes diamètres, ces deux surfaces seront déterminées, pourvu qu'on ait indiqué quel est le diamètre sur lequel seront placées les deux extrémités qui sont réelles dans la troisième. L'hyperboloïde à une nappe touchera l'ellipsoïde dans la section plane qui passe par les quatre extrémités réelles de diamètres conjugués; donc il touchera dans leurs milieux les quatre arêtes de la pyramide qui passent par ces extrémités, et qui sont quatre positions de la droite génératrice, tandis que les deux autres arêtes qui seront opposées entre elles seront des asymptotes à cette surface. L'hyperboloïde à deux nappes, ne touchera l'ellipsoïde que dans les deux extrémités de diamètre qui sont réelles; il ne touchera dans leurs milieux que les deux arêtes qui passent par ces deux extrémités, et qui sont opposées entre elles; les quatre autres arêtes seront des asymptotes à cette surface.

Il suit de là que si l'on prolonge indéfiniment les six arêtes d'une pyramide triangulaire quelconque, on pourra inscrire entre

ces six droites celle des surfaces du second degré que l'on voudra. S'il est question de l'ellipsoïde, il n'y a pas d'ambiguité; sa surface ne peut exister que dans l'intérieur même de la pyramide, elle touche toutes les arêtes dans leurs milieux. S'il s'agit de l'une des deux autres surfaces, elle existe toute entière en-dehors de la pyramide; elle ne touche que deux ou quatre des arêtes dans leurs milieux, les autres arêtes sont des asymptotes, et cette surface est entièrement déterminée, si on indique d'ailleurs sur lequel des diamètres conjugués doivent être prises les deux extrémités qui sont ou seules réelles, ou seules imaginaires.

Enfin, en supposant toujours six arêtes de la pyramide prolongées indéfiniment de part et d'autre, si l'on en considère quatre quelconques opposées entre elles deux à deux, il existe toujours un plan qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, les coupe toutes quatre dans des points qui sont toujours sur la circonférence d'un cercle; le diamètre de ce cercle varie suivant la position du plan, et il est le plus petit lorsque le plan passe par le centre du parallélipipède circonscrit. La position de ce plan est susceptible de deux solutions différentes.

En supposant que les trois surfaces conjuguées du second degré soient construites, si l'on considère la pyramide conjuguée, ses six arêtes se comporteront comme celles de la première pyramide par rapport à ces trois surfaces; donc, si l'on prolonge indéfiniment les douze arêtes des deux pyramides conjuguées, elles seront toutes touchées par la surface de l'ellipsoïde, deux à deux dans chacune des extrémités de diamètres conjugués; huit d'entre elles seront touchées par l'hyperboloïde à une nappe, deux à deux dans chacune des quatre extrémités réelles de ses diamètres, les quatre autres seront asymptotes, et quatre d'entre elles seront touchées par l'hyperboloïde à deux nappes deux à deux dans chacune des deux extrémités réelles de ses diamètres, et les huit autres seront des asymptotes.

Enfin, si parmi ces douze arêtes prolongées, on considère les huit qui sont dans quatre faces quelconques du parallélipipède parallèles entre elles deux à deux, il existe un plan qui se mouvant parallèlement à lui-même, les coupe toutes en huit points, qui sont toujours dans la circonférence d'un cercle; et ce plan est susceptible de deux positions différentes.

§. II. SCIENCES PHYSIQUES.

Une lettre de Londres du 23 novembre 1807 avoit annoncé que M. Davy étoit parvenu au moyen d'une forte pile galvanique, à décomposer les deux alcalis la potasse et la soude; que ce chimiste avait lu à la Société royale de Londres, un mémoire dans lequel il concluait que ces deux alcalis étoient des oxides métalliques.

Le 8 décembre 1807, MM. *Gay* et *Thenard* ont repété dans le laboratoire de l'Ecole polytechnique les expériences de M. Davy, et ont en effet obtenu au pôle négatif d'une pile à larges plaques, les deux nouveaux métaux dont on n'avoit pas même jusqu'alors soupçonné l'existence.

Ces deux chimistes ont continué ce travail sous un nouveau point de vue; ils se sont proposé de trouver une substance assez oxidable pour enlever l'oxigène aux alcalis qui venoient d'être reconnus pour des oxides métalliques; leurs essais furent suivis du plus grand succès.

Le 7 mars 1808, MM. Gay et Thenard ont annoncé à l'Institut de France qu'en traitant au feu d'un fourneau à reverbère la potasse avec le fer, ce dernier métal désoxidoit la potasse et la faisoit passer à l'état métallique.

Une vérité nouvelle est d'autant plus importante, qu'elle se lie à un plus grand nombre de faits, qu'elle éclaircit plus de doutes, qu'elle donne lieu à un plus grand nombre de nouvelles recherches; la découverte de MM. Gay et Thenard sous tous ces rapports, n'est pas moins brillante que celle du savant anglais Davy; considérée historiquement, elle confirme l'observation déja faite, que les méthodes les plus élégantes, les faits les plus simples ne sont presque jamais le résultat des premiers essais; on sait que le charbon désoxide le fer, qu'il ne désoxide pas la potasse, et cependant les expériences de MM. Gay et Thenard prouvent qu'à une haute température, le fer enlève l'oxigène à la potasse; en lisant le passage suivant de la Chimie de Lavoisier, (p. 174, troisième édition, 1801,) on verra que ce célèbre chimiste n'avoit pas encore observé cette influence du calorique dans l'action réciproque des corps, qui est l'objet d'un des plus beaux chapitres de la Statique chimique de M. Berthollet: « Il est probable que nous ne con-« noissons qu'une partie des substances métalliques qui existent

« dans la nature ; toutes celles, par exemple, qui ont plus d'affi-
« nité avec l'oxigène qu'avec le carbone, ne sont pas susceptibles
« d'être réduites ou ramenées à l'état métallique, et elles ne doi-
« vent se présenter à nos yeux que sous la forme d'oxides qui se con-
« fondent pour nous avec les terres ; il est très-probable que la
« baryte que nous venons de ranger dans la classe des terres est
« dans ce cas : elle présente dans le détail des expériences, des
« caractères qui la rapprochent beaucoup des substances métalli-
« ques. Il serait possible, à la rigueur, que toutes les substances
« auxquelles nous donnons le nom de terres, ne fussent que des
« oxides métalliques, irréductibles par les moyens que nous em-
« ployons. »

De l'appareil propre a réduire la potasse par le fer ;

Par M. HACHETTE.

MM. les Pages desirant connoître le nouveau métal qu'on obtient de la potasse, j'ai répété dans leur laboratoire de chimie, l'expérience de MM. Gay et Thenard, en présence de leur gouverneur, M. d'Assigny.

L'appareil est aussi simple que celui de la décomposition de l'eau par le fer, et tout se passe de la même manière que dans cette dernière expérience; ayant rempli le milieu d'un canon de fusil de rognures de fer découpées en très-petits morceaux, dans une longueur égale à celle du fourneau qu'on a à sa disposition, on introduit la potasse caustique dans l'une des parties du canon qui est hors le fourneau, et on lute son extrémité; on met à l'extrémité de l'autre partie du canon un tube de sûreté, et on chauffe fortement le canon.

Le fourneau dont je me suis servi, a 25 centimètres de diamètre, j'y ai adapté un soufflet de forge à double vent ; tandis qu'on chauffoit le fourneau, je refroidissois à la glace la partie du canon qui contenoit la potasse; après une heure de feu ardent, j'ai fait fondre la potasse au moyen d'un petit fourneau à main en tôle; le canon étant un peu incliné vers le tube de sûreté, la potasse fondue s'est mise en contact avec le fer; aussitôt l'hydrogène de son eau de cristallisation s'est dégagé par l'extrémité du tube de sûreté plongeant dans l'eau.

Ce dégagement d'hydrogène est un indice certain du succès de l'expérience; s'il se rallentit, parce que la potasse liquide aura refroidi le fer, on peut ôter le petit fourneau placé sous la potasse,

qui la tient liquide, et rendre au fer la température nécessaire pour recevoir de nouvelle potasse liquide.

Ce dernier effet est, comme on voit, tout à fait semblable à ce qui se passe dans la décomposition de l'eau, car si on verse trop d'eau sur le fer rouge, ce métal se refroidit, et l'eau passe en vapeur sans se décomposer.

Avant de fondre la potasse pour l'amener sur le fer, j'avois mis à la glace la partie du canon à laquelle le tube de sûreté est adapté, et qui sert de réfrigérent.

Après une demi-heure environ, à compter du moment où la potasse se fond, le dégagement d'hydrogène cesse, et l'opération est terminée.

Lorsque le fourneau est entièrement refroidi, on ôte le tube de sûreté, et on ferme l'extrémité du canon par un bouchon; pour retirer le métal, on coupe le canon à la naissance de la partie qui a servi de réfrigérent, et le métal (le potasse) se présente sous la forme de petites lames brillantes adhérentes aux parois du canon; la plus grande partie est au commencement du réfrigérent; une autre partie n'est condensée que près du bouchon du tube de sûreté; cette dernière partie est très-peu adhérente au canon; le moindre effort suffit pour la détacher, elle est même en partie oxidée par l'air rentré pendant le refroidissement du fourneau, et lorsqu'on reçoit le tout dans l'huile de naphte, cette partie oxidée se détache en lames, et laisse à découvert une lame métallique blanche et brillante.

Quant à la portion de potasse condensé plus près du fourneau, il faut le détacher au moyen d'un outil d'acier tranchant, et par morceaux les plus gros possibles; car s'il est en petites molécules, il s'enflamme dans l'air comme le fer, à une température même très-basse; lorsqu'on ne peut pas le détacher par gros morceaux, il faut le tenir dans un gaz privé d'oxigène, ou dans l'huile de naphte; c'est en le plongeant dans l'huile que je l'ai retiré du canon.

On trouve encore dans le canon des amalgames de fer et de potasse, ils adhèrent très-fortement à la partie du canon qui occupe le milieu du fourneau, ils verdissent à l'air, et s'y décomposent facilement; le potasse repasse en peu de tems à son premier état.

Pour obtenir le potasse en grand et commodément, il faudroit un canon d'un grand diamètre, qui seroit chauffé sur une grande longueur, et qui porteroit à son extrémité un tube dans lequel on tiendroit la potasse liquide; ce tube seroit disposé de manière qu'on pourroit faire tomber telle quantité d'oxide de potasse liquide qu'on voudroit,

et on le volatiliseroit avant de le mettre en contact avec le fer; on placeroit à l'extrémité de ce canon, un autre canon formé de deux parties; ce dernier serviroit de réfrigérent, et on pourroit l'ouvrir pour recueillir le métal.

Le Ministre d'Etat, Gouverneur de l'Ecole Impériale Polytechnique, à M. le rédacteur du Moniteur.

Paris, 29 janvier 1808.

Le conseil de perfectionnement de l'Ecole impériale polytechnique, auquel la lettre ci-jointe a été communiquée par M. Guyton, l'un de ses membres, a desiré qu'elle eût la même publicité que l'extrait du rapport de MM. Gay et Thenard sur les expériences de M. Davy.

Je vous prie de vouloir bien l'insérer dans un de vos plus prochains numéros (1).

J'ai l'honneur de vous saluer avec considération,

Signé J. G. Lacuée.

Hachette, professeur de mathématiques et de physique des Pages de LL. MM. II. et RR., instituteur à l'Ecole Polytechnique, à M. Guyton.

Paris, le 22 janvier 1808.

Je vous avois témoigné mes regrets de ce que dans le compte rendu à l'Institut sur les expériences de M. Davy, et publié par extrait dans la plupart des journaux, on avoit oublié de citer l'Ecole polytechnique qui, depuis la naissance du galvanisme, a pris un intérêt particulier à cette branche de la physique; depuis j'ai appris que M. le Gouverneur partageoit les sentimens des professeurs, et qu'il étoit dans l'intention d'informer le public de la part qu'a eue l'Ecole polytechnique dans le perfectionnement des appareils électromoteurs. Dans cette circonstance, je crois qu'il n'est pas inutile de rappeler ce qui a été fait par les soins et aux frais de cet établissement.

---

(1) Elle a été insérée dans le *Moniteur* du 31 janvier 1808.

M. Thenard et moi sommes les premiers qui avons fait voir l'influence des dimensions dans les plaques qui composent les piles de Volta ; nous avons prouvé que dans les piles qui ne diffèrent entre elles que par la grandeur des plaques superposées, *la tension de l'électricité aux pôles est constamment la même* ; nous avons fait voir que la grandeur des plaques augmentoit la quantité d'électricité qui se développe dans un tems donné, et nous avons rendu cette augmentation sensible par la combustion des métaux, soit dans le gaz oxigène, soit dans l'air atmosphérique. Tous ces faits sont consignés dans le Journal de l'Ecole, onzième cahier, et notamment dans une lettre adressée à M. Fourcroy, le 14 prairial an 9 (3 juin 1801,) et imprimée dans le même cahier, page 291.

Le conseil de l'Ecole ayant reconnu l'importance des piles à grandes plaques, accorda des fonds suffisans pour s'en procurer ; j'ai fait construire par Dumotier l'appareil qui existe maintenant à l'Ecole, dont j'ai décrit les effets dans le *Précis des leçons sur le calorique et l'électricité*, page 77 ; il est composé de 60 couples (cuivre et zinc,) de forme carrée, chaque côté du carré étant de 18 centimètres.

Le même conseil nous ayant chargés vous et moi de reprendre nos expériences sur le diamant, nous nous sommes servis de cet appareil pour soumettre le diamant à son action ; vous vous proposez de rendre un compte particulier (1) de nos derniers essais, qui, comme vous savez, n'ont été suspendus qu'en attendant les appareils qui nous manquent. Ayant senti le besoin d'avoir une pile encore plus forte que celle de l'Ecole, vous vous êtes décidé à faire construire à vos frais 150 nouveaux couples. C'est avec votre appareil réuni à celui de l'Ecole, que MM. Gay et Thenard sont parvenus à répéter les expériences de M. Davy.

Je vous prie, Monsieur, de communiquer cette note à M. le Gouverneur et au conseil de perfectionnement, si vous le jugez convenable.

Je suis avec un respectueux attachement, etc.

P. S. M. Guyton a le premier fait voir l'influence de l'électricité galvanique naturelle, sur les minéraux; *voyez son Mémoire dans le Journal de l'Ecole polytechnique, messidor an* 10, (*juillet* 1802,) *page* 308, *et la suite de ce Mémoire dans les Annales de Chimie, tome* 63, *août* 1807, *page* 113.

---

(1) Voyez le cahier des Annales de chimie. Janvier 1808, pag. 86.

J. G. Lacuée, Conseiller d'état, Gouverneur de l'Ecole Impériale Polytechnique, à M. le sénateur Monge, président de la commission nommée pour la construction de la pile galvanique. (Cette Commission est composée de MM. Monge, Guyton, Hachette, Lacroix, Hassenfratz, auxquels sont adjoints MM. Gay et Thenard.

Paris, 13 février 1808.

J'ai l'honneur d'annoncer à la commission dont vous êtes président, monsieur le sénateur, que Sa Majesté vient de faire mettre à ma disposition la somme de 20,000 fr. pour la construction de la pile galvanique.

La commission peut donc s'occuper dès aujourd'hui de l'exécution.

Elle pensera peut-être devoir nommer deux de ses membres pour donner les ordres, en suivre l'exécution, et donner les certificats de réception et de bonne confection, etc.

J'ai l'honneur de vous saluer, monsieur le sénateur, avec la considération la plus distinguée.

Signé J. G. Lacuée.

§. III. ANNONCE D'OUVRAGES.

M. Prony a publié cette année 1808 les sommaires de ses leçons à l'Ecole polytechnique sur le mouvement des corps solides, l'équilibre et le mouvement des fluides.

Ces sommaires sont au nombre de 52, ils forment un vol. in-4°. d'environ 90 pages.

M. Andrieux a fait imprimer, comme il l'a annoncé, (*Voyez* page 320,) les sommaires de ses leçons de grammaire; ils sont au nombre de 36, et forment un volume in-4°. On imprime maintenant les sommaires pour le cours des belles-lettres, qui fait suite au cours de grammaire.

Une seconde édition de la figure de la terre, par *Clairault*, vient de paroître par les soins de M. Poisson; cet ouvrage ori-

ginal, mis au jour en 1743, manquoit depuis plusieurs années; tous ceux qui s'occupent d'astronomie, ou qui desirent connoître la marche des inventeurs dans la science difficile de la mécanique, sauront gré à M. Poisson d'avoir donné au public une nouvelle édition plus correcte que la première.

Le 14e. cahier du journal de l'Ecole Polytechnique vient de paroître par les soins de MM. Hachette et Poisson, membres de la commission chargée par le conseil d'instruction de l'impression de son journal. — Il renferme sept mémoires d'analyse, et deux autres mémoires, l'un sur les Canaux de Navigation; l'autre, sur le Bélier Hydraulique. Il est terminé par les leçons 20 et 21 de M. Lagrange sur le calcul des fonctions, dont les vingt premières leçons forment le 13e. cahier de ce journal.

Le rapport sur l'Ecole Impériale Polytechnique, arrêté par le conseil de perfectionnement dans sa 8e. session de l'an 1807, a paru imprimé (petit in-4°. de 91 pages, avec une planche).

---

§. IV. PERSONNEL.

MM. Monge et Duhays sont membres du conseil d'administration de l'Ecole Impériale Polytechnique pendant l'année 1808.

S. E. le gouverneur de l'Ecole Impériale Polytechnique a nommé, le 21 avril 1808, M. Binet, (Jacques-Philippe-Marie) répétiteur de géométrie descriptive en remplacement de M. Livet, démissionnaire.

M. Livet est entré à l'Ecole Polytechnique le premier de la promotion de 1802; a été admis à l'école des ponts-et-chaussées en 1805, en conservant le premier rang; a donné sa démission pour suivre une éducation particulière en Pologne; S. E. Monsieur le gouverneur, en acceptant sa démission, lui a donné les témoignages d'estime dus à ses talens, et lui a exprimé les regrets de MM. les professeurs de l'Ecole Polytechnique.

§. V. ACTES DU GOUVERNEMENT.

Extrait de la loi du 10 mai 1806, portant création d'un corps enseignant.

Titre 1er., *article* 14.

A Paris, la faculté des sciences sera formée de la réunion de deux professeurs du Collège de France ; de deux du Muséum d'Histoire Naturelle, de deux de l'*Ecole Polytechnique*, et de deux professeurs de mathématiques des Lycées.

Titre 4, *article* 113.

Ces aspirans (*de l'Ecole Normale*) suivront les leçons du Collège de France, de l'*Ecole Polytechnique*, ou du Muséum d'Histoire Naturelle, suivant qu'ils se destineront à enseigner les lettres ou les divers genres de sciences.

ERRATA.

	Pag.	*lig.*	
N°. 3.	331,	5,	après $\frac{N}{K}$, *lisez*: $\frac{R}{K}$.
	351,	4,	(1)... (=, *lisez* : (1) 4 Q^2 =.
	Id.,	5,	p cos a, *lisez* : p cos c.
	355,	29,	Dubois aîné, *lisez* : Dubois Aimé.
	372,	3,	*ajoutez* : 22 janvier 1808.
	374,	22,	ingénieur des ponts-et-chaussées, *lisez*: géographe.
N°. 10.	389,		avant dernière équation, p, p', p'', *lisez* : q, q', q''.
	390,	25,	$\mathit{6}''$, *lisez* : γ'.
	409,	2,	diamètres, *lisez* : largeurs.
	412,	12 et 13,	diamètre, *lisez* : la largeur.
	Id.,	30,	Spalato, *lisez* : Spalatro.
	414,	18,	par, *lisez* : pour.
	Id.,	33,	$\frac{250}{1817}$, *lisez* : $\frac{250}{187}$.

Explication de l'Arc-en-ciel, par M. Hachette.

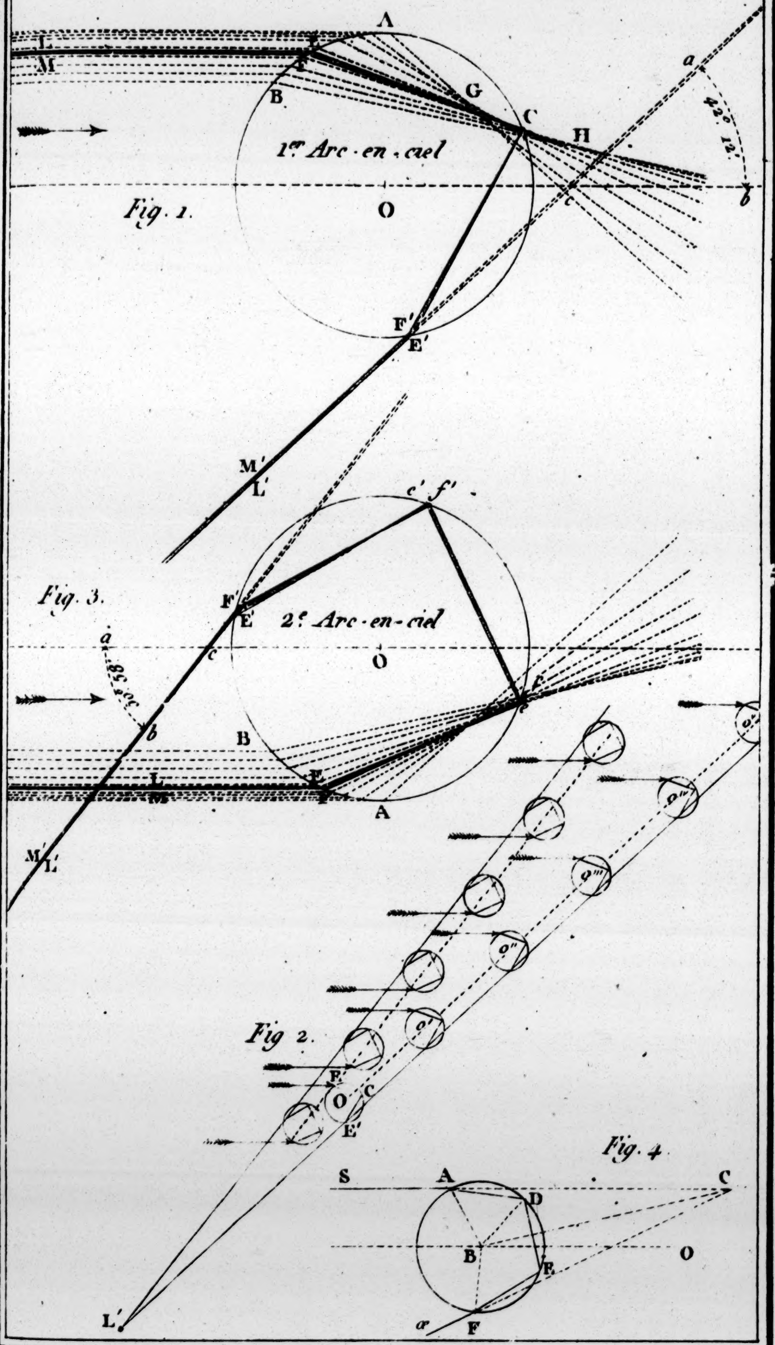


Fig. 1.

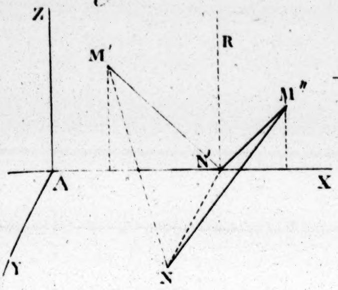


Fig. 2.

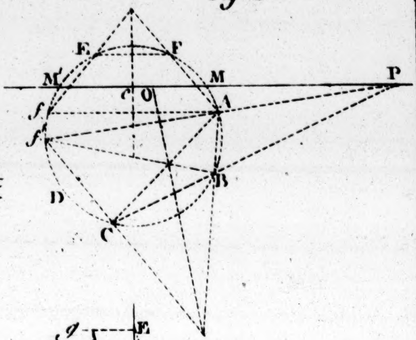


Fig. 3.

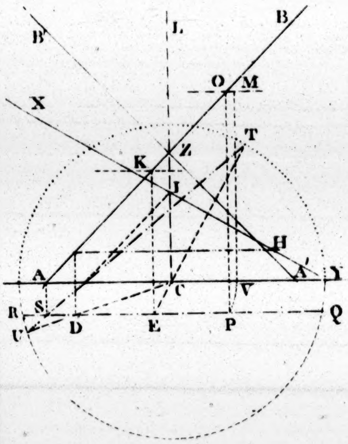
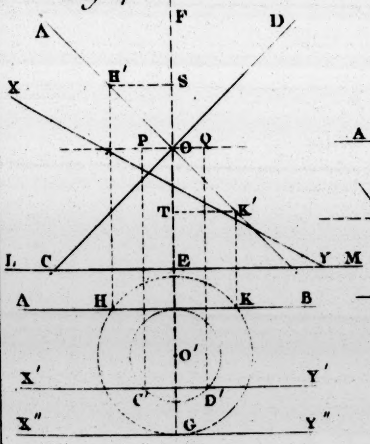


Fig. 4.



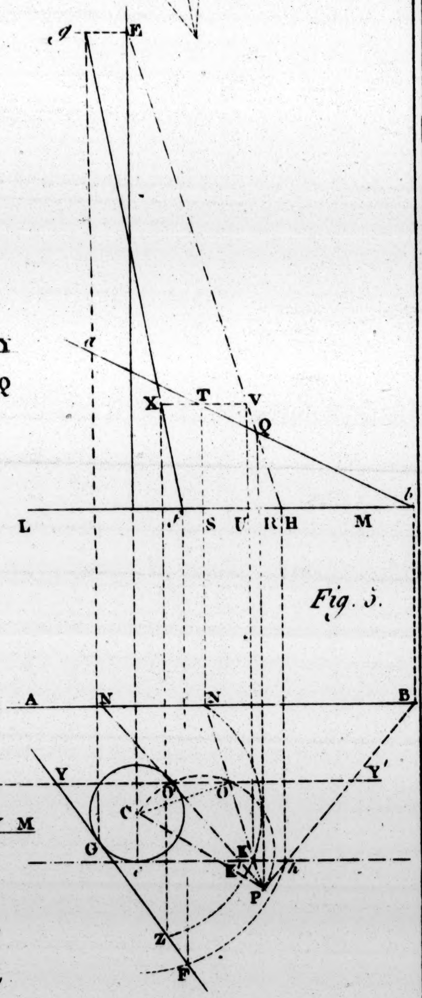


Fig. 5.

E:

A
Dav
taïq
rép
poi
Da
d'o
que
lue
pou
con
les
ces
au
cor
on
ni
prè
Ma
pet
res
tai
ren
ob
Ga
no
cas
de
nic
rés
hy
ve
alo
av

SUPPLÉMENT AU N°. 10.

Expériences de MM. Gay-Lussac *et* Thenard, *faites au laboratoire de l'*Ecole *Polytechnique.*

Aussitôt qu'on a connu en France les expériences que M. Davy a faites sur la potasse et la soude, au moyen de la pile voltaïque, MM. Gay-Lussac et Thenard se sont empressés de les répéter ; mais quoiqu'ils les aient trouvées exactes, ils n'en ont point tiré les mêmes conséquences que ce célèbre chimiste. M. Davy a conclu de ses expériences, que les alcalis étoient formés d'oxigène et d'une substance métallique très inflammable ; tandis que MM. Gay-Lussac et Thenard en ont conclu (dans une note lue à l'Institut le 12 janvier), qu'on n'avoit pas plus de raisons pour admettre la composition des alcalis que pour les regarder comme des corps simples. En effet, on pouvoit supposer que les métaux qu'on en retire, n'étoient que des combinaisons de ces alcalis avec l'hydrogène. Cette hypothèse expliquoit même, au moins aussi bien que la première, le petit nombre de faits connus alors ; ou si quelques-uns étoient plus favorables à l'une, on pouvoit en citer de plus favorables à l'autre. Par conséquent, ni l'une ni l'autre ne devoit être préférée ; et ce n'étoit que d'après des expériences multipliées qu'on pouvoit faire un choix. Mais la quantité de métal qu'on se procure par la pile, est si petite que, faute d'autres moyens de s'en procurer, on seroit resté longtems flottant entre ces deux hypothèses, quoique certain que l'une d'elles étoit vraie. Il étoit donc vivement à desirer qu'on découvrît un procédé au moyen duquel on pût en obtenir abondamment et facilement ; et c'est ce procédé que MM. Gay-Lussac et Thenard ont découvert, et qu'ils ont fait connoître à l'Institut le 7 mars dernier. S'étant ainsi mis dans le cas de résoudre la question, ils n'ont cessé de s'en occuper depuis cette époque ; enfin, le 16 mai, après avoir communiqué à l'Institut, dans les mois de mars et d'avril, différens résultats plus ou moins favorables à l'une ou à l'autre de ces hypothèses, ils lui en ont présenté de nouveaux qui semblent lever tous les doutes, et prouver que les métaux qu'on retire des alcalis, ne sont réellement que des combinaisons de ces alcalis avec l'hydrogène.

Nous allons donner un extrait de leurs recherches; et, d'abord nous allons rapporter le procédé qu'ils suivent, et tel qu'ils l'ont lu à l'Institut, pour préparer les métaux de la potasse et de la soude.

On prend un canon de fusil, très-propre dans son intérieur; on en courbe la partie moyenne et l'un des bouts, de manière à le rendre parallèle à l'autre; on couvre cette partie moyenne d'un lut infusible, et on la remplit de limaille de fer, ou mieux de tournure de fer bien pure; puis on dispose ce tube en l'inclinant sur un fourneau à réverbère; ensuite on met de l'alcali bien pur dans le bout supérieur, et on adapte une allonge bien sèche, portant un tube bien sec lui-même au bout inférieur. Les proportions de fer et d'alcali qu'on emploie sont trois parties du premier et deux parties du second; mais on peut les faire varier. L'appareil ainsi disposé, on fait rougir fortement le canon du fusil, en excitant la combustion au moyen d'un soufflet de forge ou d'un tuyau de tôle qui détermine une plus vive aspiration. Lorsque le tube est extrêmement rouge, on fond peu-à-peu l'alcali qui, par ce moyen, est mis successivement en contact avec le fer et converti presqu'entièrement en métal. Dans cette opération, il se dégage en même tems que le métal se volatilise, beaucoup de gaz hydrogène qui quelquefois est très-nébuleux, et qui provient de l'eau que contient l'alcali; on est même averti que l'opération touche à sa fin, quand le dégagement du gaz cesse. Alors, on retire du feu le canon, qui n'a nullement souffert si les luts ont bien tenu, et qui, au contraire, est fondu si les luts se sont détachés; on le laisse refroidir, et on en coupe l'extrémité inférieure, près de l'endroit où elle sortoit du fourneau: c'est dans cette extrémité inférieure et en partie dans l'allonge qu'on trouve le métal; on l'en retire, en le détachant avec une tige de fer tranchante, et le recevant soit dans du naphte, soit dans une petite éprouvette bien sèche. Pour l'obtenir plus pur encore, on le passe au travers d'un nouet de linge dans le naphte même, à l'aide d'une température et d'une compression convenables. Le métal ainsi préparé est pur; il ne contient ni fer, ni alcali, et peut se conserver dans l'huile indéfiniment. Il faut bien se garder d'employer du charbon ou des matières qui en contiennent, pour retirer ces métaux des alcalis; car alors ils en retiendroient une plus ou moins grande quantité, et jouiroient de propriétés très-variables.

C'est sur-tout le métal de la potasse que MM. Gay-Lussac et Thenard ont étudié. Aussi ne sera-t-il ici question que de ses propriétés.

Ce métal a un éclat métallique semblable à celui du plomb; on peut le pétrir entre les doigts comme de la cire, et le couper plus facilement que le phosphore le plus pur.

Sa pesanteur spécifique est de 874, celle de l'eau étant 1000; aussitôt qu'on le jette sur l'eau, il s'enflamme et se promène lentement sur ce liquide; lorsque l'inflammation cesse, il se fait ordinairement une petite explosion, et il ne reste dans l'eau que de la potasse caustique très-pure. Pour déterminer la quantité d'hydrogène que le métal dégage dans son contact avec l'eau, MM. Gay-Lussac et Thenard en ont rempli un tube de fer, qui avoit reçu par là un accroissement en poids de 2,284 grammes, et ont introduit ce tube fermé par un disque de verre sous une cloche pleine d'eau. A peine le métal a-t-il touché l'eau, qu'il a été projeté contre la partie supérieure de la cloche en dégageant beaucoup de gaz hydrogène, mais sans aucune apparence d'inflammation. Ce gaz hydrogène étoit très-pur et formoit un volume de 64,892 centimètres cubes, le thermomètre étant à 6 degrés, et le baromètre à 76 centimètres.

Le métal de la potasse se combine très-bien avec le phosphore, le soufre, avec un très-grand nombre de métaux, et sur-tout avec le fer et le mercure, et forme des composés particuliers. Sa combinaison est même si intime avec le phosphore et le soufre, qu'au moment où elle a lieu, il y a un grand dégagement de chaleur et de lumière. Le phosphure projeté dans l'eau, y forme beaucoup de gaz hydrogène phosphoré qui s'enflamme : le sulfure y forme un sulfate et un sulfure hydrogéné.

Mais parmi les combinaisons qu'il est susceptible de former, il n'en est point de plus curieuse et de plus importante que celle qui résulte de son action sur les gaz.

Il brûle vivement dans le gaz oxigène à la température ordinaire, l'absorbe et se transforme en potasse.

Mis en contact avec l'air atmosphérique, sans élever la température, il prend d'abord une belle couleur bleue; ensuite en l'agitant, il se fond, forme un bain brillant, s'enflamme, absorbe tout l'oxigène de l'air, se convertit en potasse, et n'absorbe point d'azote. Ainsi donc il n'a aucune action sur ce dernier gaz.

Il n'en est pas de même sur le gaz hydrogène; il peut à une haute température en absorber une quantité remarquable, et il se transforme alors en une matière solide, d'un gris blanchâtre, dont on retire du gaz hydrogène par le mercure et par l'eau.

Son action sur les gaz hydrogène phosphoré, sulfuré, arseniqué, est encore plus grande que sur le gaz hydrogène. A une température d'environ 70 degrés, il les décompose, s'empare de tout le phosphore, le soufre, l'arsenic, et d'une portion de l'hydrogène qu'ils contiennent. La décomposition de l'hydrogène phosphoré a même lieu avec flamme. La portion de gaz hydrogène non absorbée, reste à l'état de gaz.

Sa combustion dans les gaz acide nitreux et acide muriatique oxigéné, est aussi vive que dans le gaz oxigène. Quelquefois pourtant, l'inflammation n'a point lieu de suite; mais cela tient à ce que le métal se recouvre de muriate ou de nitrite de potasse, qui protège le centre contre l'action du gaz ; alors il faut remuer la matière, et bientôt une vive lumière est produite.

On peut analyser rigoureusement et en un instant le gaz nitreux et le gaz oxide d'azote par le métal de la potasse. Aussitôt, ou presqu'aussitôt que le métal est fondu et en contact avec ces gaz, il devient bleu, s'enflamme, absorbe tout l'oxigène, et laisse l'azote à nu. C'est encore de cette manière qu'il se comporte avec le gaz acide sulfureux, et avec le gaz acide carbonique et le gaz oxide de carbone provenant de la décomposition du carbonate de barite par le fer; seulement il faut plus élever la température dans toutes ces expériences que dans la précédente: le métal devient bleu, bientôt s'enflamme, et la base du gaz est séparée. Avec le gaz acide sulfureux, on obtient un sulfure de potasse et point de résidu gazeux; avec les gaz acide carbonique et oxide de carbone, on obtient du charbon, de la potasse, et toujours point de résidu gazeux.

L'acide fluorique sec a aussi offert avec le métal des phénomènes dignes de la plus grande attention.

A froid, il n'y a aucune action, mais à chaud, il y a une inflammation très-vive; tout le gaz disparoît sans qu'il s'en développe aucun autre, et le métal se convertit en une matière noirâtre, qui ne fait aucune effervescence avec l'eau, et qui contient du fluate de potasse, et un peu de charbon provenant du métal. On peut présumer que dans cette expérience, l'acide fluorique est décomposé; mais cette décomposition ne sera démontrée, et ne pourra être admise qu'autant qu'on en séparera le radical, et qu'avec ce radical on pourra reformer cet acide.

MM. Gay-Lussac et Thenard ont fait un grand nombre d'essais sur le gaz acide muriatique; mais comme jusqu'ici ils ne l'ont point obtenu sans eau, ils n'ont point parlé de son action sur

ce métal. Seulement ils ont rapporté qu'en traitant le mercure doux par le phosphore, dans l'espérance d'avoir de l'acide muriatique bien sec, ils ont trouvé une liqueur nouvelle très-limpide, sans couleur, répandant de fortes vapeurs, s'enflammant spontanément lorsqu'on en imbibe le papier joseph; laquelle ne paroît être qu'une combinaison de phosphore, d'oxigène et d'acide muriatique, et par conséquent analogue à celle qu'on obtient en traitant le soufre par le gaz acide muriatique oxigéné.

Toutes les expériences dont on vient de parler peuvent s'expliquer dans les deux hypothèses qui ont été exposées précédemment; et probablement que beaucoup d'autres pourront également recevoir une double interprétation; mais il n'en est pas de même de celles qui suivent.

Lorsqu'on met ce métal en contact avec le gaz ammoniaque dans un tube bien sec sur le mercure, et qu'on le fait fondre, il disparoît peu-à-peu, se transforme en une matière grise verdâtre très-fusible; l'ammoniaque elle-même disparoît en presque totalité, et se trouve remplacée dans le tube par un volume de gaz hydrogène égal à environ les deux tiers de celui du gaz ammoniaque employé. Si on chauffe fortement dans le tube de verre, même tout rempli de mercure, la matière grise verdâtre qui y est attachée à la partie supérieure sous forme de plaque, on peut en retirer au moins les trois cinquièmes de l'ammoniaque absorbée; savoir, deux cinquièmes d'ammoniaque non décomposée, et un cinquième d'ammoniaque décomposée, ou dont les élémens ont été rendus par le feu à l'état de liberté. Si ensuite on met avec quelques gouttes d'eau la matière grise verdâtre ainsi fortement chauffée, on en dégage sensiblement les deux autres cinquièmes d'ammoniaque absorbée; on n'en dégage point d'autre gaz, et ce qui reste n'est que de la potasse très-caustique. Enfin si on reprend le gaz ammoniaque dégagé par le feu de la matière grise verdâtre, et si on s'en sert pour traiter de nouveau métal, il y a de nouveau formation de matière grise verdâtre semblable à la précédente, absorption de gaz ammoniaque et apparition d'une grande quantité de gaz hydrogène. On peut encore répéter cette expérience avec l'ammoniaque retirée de cette seconde matière grise verdâtre, etc., et toujours on obtiendra les mêmes phénomènes; en sorte que, par ce moyen, avec une quantité donnée d'ammoniaque, on peut obtenir plus que son volume de gaz hydrogène.

Actuellement recherchons d'où peut provenir ce gaz hydrogène. Admettra-t-on qu'il vient de l'ammoniaque décomposée?

Mais cela est impossible, puisqu'on retire toute l'ammoniaque employée. D'ailleurs on a vu que le métal ne peut point se combiner avec le gaz azote, et qu'au contraire il se combine assez bien avec le gaz hydrogène, pour qu'on puisse, par ce moyen, opérer la séparation de ces deux gaz ; de plus, on peut encore ajouter à toutes ces preuves, qu'en traitant des quantités égales de métal par l'eau et par le gaz ammoniaque, on obtient absolument de part et d'autre la même quantité de gaz hydrogène.

Ainsi cet hydrogène ne provient que de l'eau qu'on pourroit supposer dans le gaz ammoniaque, ou du métal lui-même ; mais d'après les expériences de M. Berthollet le fils, il est prouvé que le gaz ammoniaque ne contient point sensiblement d'eau, et on obtient tant d'hydrogène que, pour supposer qu'il soit dû à l'eau de l'ammoniaque, il faudroit admettre que cette ammoniaque contient plus que son poids d'eau, ce qui est absurde. Donc le gaz hydrogène provient du métal ; et comme, lorsqu'on en a séparé ce gaz, ce métal se trouve transformé en alcali, *ce métal ne paroît être qu'une combinaison d'alcali et d'hydrogène.*

Note sur l'article précédent ; par M. Hachette.

Les expériences de MM. Gay-Lussac et Thenard prouvent que le métal de la potasse peut, à une certaine température, devenir sur-hydrogéné, en absorbant une quantité remarquable de gaz hydrogène ; la température à laquelle cette combinaison se fait, est un peu au-dessus de celle qui est nécessaire pour fondre le métal. Lorsqu'elle est très-élevée, sa combinaison n'a pas lieu, comme on le voit par le dégagement continuel de l'hydrogène à l'extrémité du tube de fer dont on se sert pour obtenir le métal.

En admettant que 2,284 grammes de métal de potasse dégagent, en passant à l'état de potasse, 64,892 centimètres cubes de gaz hydrogène, à la température de 6°, ce volume se réduit à 64 centimètres environ à la température de 0° ; or, à cette température, le centimètre cube d'hydrogène pèse $0^{gr},0009$ (le centimètre cube d'air atmosphérique pesant [illegible] de gramme) ; d'où il suit que le métal de la potasse contient d'hydrogène environ la 0,025^{me}. partie de son poids. Pour confirmer cette conclusion, il seroit à desirer qu'on reconnût l'hydrogène comme principe constituant d'autres métaux.

TABLEAU des personnes attachées à l'Ecole impériale Polytechnique qui ont fait partie de l'expédition d'Egypte, partie de Toulon le 18 mai 1798, sous le commandement du général en chef Bonaparte.

INSTITUTEURS.

MM.	*OBSERVATIONS.*
Monge.	Actuellement sénateur.
Berthollet.	*Idem.* A donné sa démission de sa place d'instituteur, le 1er. vendémiaire an 14.
Fourier.	Actuellement préfet du département de l'Isère. (*Voyez* p. 204.)
Say.	Mort au siége de Saint-Jean-d'Acre.

ELÈVES.

CLASSÉS PAR ORDRE DE SERVICES PUBLICS.

Artillerie.

Berge.	François.	
Boyé.	Amédée.	Mort en Egypte.
Lacy.	Etienne-Claire-Patrice.	
Thierry.	Jacques-François.	Mort en Egypte.

Génie militaire.

Bouchard.	Pierre-François-Xavier.	
Bringuier.	Jean-Balthazard.	Mort en Syrie.
Charbaut.	Jean-Louis-Laurent.	*Idem.*
Legentil.	Emmanuel-Marie-Jean.	Coopérateur de la commission d'Egypte.
Malus.	Étienne-Louis.	*Idem.*
Moret.	Amand.	
Picquet.	Jean-Baptiste.	Mort en Syrie.

Ponts-et-Chaussées.

Alibert.	Bertrand.	
Arnollet.	Pierre-Jean-Baptiste.	
Caristie.	Philippe-Joseph-Marie.	Coopérateur de la commission d'Egypte.

Chabrol.	Jacques-Joseph-Gaspard-Antoine.	Coopérateur de la commission d'Egypte.
Devilliers.	Réné-Edouard.	*Idem.*
Dubois.	Jean-Marie-Joseph-Aimé.	*Idem.*
Favier.	Louis-Joseph.	*Idem.*
Fèvre.	Jean-Baptiste-Simon.	*Idem.*
Jollois.	Jean-Baptiste Prosper.	*Idem.*
Lancret.	Michel-Ange.	*Idem.* Mort en décembre 1807. (*Voyez* pag. 374).
Moline.	Benoît.	
Potier.	Paul-Nicaise.	
Raffeneau.	Adrien.	Coopérateur de la commission d'Egypte.
Regnault.	Joseph-Angéli.-Sébastien.	*Idem.*
St.-Genys.	Alexandre.	*Idem.*
Thevenod.	Claude-François.	Mort en Egypte.

Mines.

Dupuis.	Victor.	Coopérateur de la commission d'Egypte.

Géographes.

Bertre.	Jacques-Antoine.	
Coraboeuf.	Jean-Baptiste	Coopérateur de la commission d'Egypte.
Dulion.	Jacques-Auguste.	Mort en Egypte.
Jomard.	Edme-François.	Commissaire du Gouvernement près la commission d'Egypte.
Laroche.	François.	
Lecesne.	Bienheureux-Desiré-François Réel.	

Construction des vaisseaux.

Boucher.	Mathurin-François.	Ces trois élèves sont partis de France comme ingénieurs-géographes; ils ont été admis en Egypte dans le service de la construction des vaisseaux.
Chaumont.	Jean-François.	
Greslé.	Philippe.	

Administrations publiques.

Bernard.	Denis-Samuel.	Sous-préfet à Rochefort. Coopérateur de la commission d'Egypte.
Champy.	Jean-Nicolas.	Employé dans les poudres et salpêtres. Mort en Egypte.

TABLEAU indiquant le nombre des élèves admis à l'École impériale Polytechnique, depuis son établissement, en 1795, jusques et compris l'année scholaire 1807 — 1808, et leur répartition dans les différens services, états ou fonctions à leur sortie.

Artillerie de terre	433
Artillerie de mer.	13
Génie militaire.	234
Construction des vaisseaux	40
Mines	41
Ponts et chaussées	237
Ingénieurs-géographes.	24
Troupes de ligne.	69
Marine militaire	45
Instruction publique (y compris un au bureau des longitudes)..	30
Administrations publiques	12
Arts et manufactures	14
Jurandes et magistratures	3
Commerce	2
Retirés par démission (1)..	416
Morts	51
	1664
Elèves non placés et composant l'Ecole au commencement de l'année scholaire 1807 à 1808. .	316
Total égal au nombre des élèves admis . .	1980

(1) Il est à remarquer, sur ce nombre de démissionnaires, que 220 se sont retirés pendant les années 1795 et 1796; à cette époque, le manque de subsistances a obligé un grand nombre d'élèves à quitter Paris.

TABLEAU des Elèves fournis par chaque département l'Ecole Impériale Polytechnique, depuis son établisseme en l'an 3, (1795) jusques et compris l'année 1807.

NOMS des DÉPARTEMENS.	NOMBRE d'élèves fournis.	NOMS des DÉPARTEMENS.	NOMBRE d'élèves fournis.	NOMS des DÉPARTEMENS.	NOMBRE d'élèves fournis.
			520		777
Ain	19	Gironde	14	Nord	31
Aisne	16	Golo	4	Oise	21
Allier	13	Hérault	21	Orne	14
Alpes (Basses-)	1	Ille-et-Villaine	45	Ourte	[illegible]
Alpes (Hautes-)	7	Indre	14	Pas-de-Calais	29
Alpes-Maritimes	1	Indre-et-Loire	16	Pô	1
Apennins	»	Isère	42	Puy-de-Dôme	26
Ardèche	5	Jemmape	1	Pyrénées (Basses)	6
Ardennes	40	Jura	38	Pyrénées (Hautes-)	2
Arriége	5	Landes	1	Pyrénées-Oriental.	9
Aube	11	Léman	7	Rhin (Bas-)	29
Aude	20	Liamone	3	Rhin (Haut-)	15
Aveyron	6	Loir-et-Cher	11	Rhin-et-Moselle	»
Bouches-du-Rhône	10	Loire	8	Rhône	26
Calvados	57	Loire (Haute-)	2	Roër	1
Cantal	7	Loire-Inférieure	29	Sambre et Meuse	1
Charente	6	Loiret	19	Saône (Haute-)	15
Charente-Inférieure	16	Lot	12	Saône-et-Loire	15
Cher	8	Lot-et-Garonne	24	Sarre	1
Corrèze	6	Lozère	2	Sarthe	15
Côte-d'Or	49	Lys	2	Seine	286
Côtes-du-Nord	15	Maine-et-Loire	13	Seine-Inférieure	48
Creuse	4	Manche	26	Seine-et-Marne	16
Doire	»	Marengo	1	Seine-et-Oise	49
Dordogne	21	Marne	36	Sèvres (Deux-)	10
Doubs	30	Marne (Haute)	24	Sésia	»
Drôme	11	Mayenne	7	Somme	23
Dyle	5	Meurthe	52	Stura	1
Escaut	1	Meuse	33	Tarn	21
Eure	21	Meuse-Inférieure	3	Var	12
Eure-et-Loir	13	Mont-Blanc	12	Vaucluse	3
Finistère	50	Montenotte	1	Vendée	8
Forêts	»	Mont-Tonnerre	5	Vienne	3
Gard	7	Morbihan	12	Vienne (Haute-)	12
Garonne (Haute-)	31	Moselle	5[illegible]	Vosges	17
Gênes	»	Nèthes (Deux-)	»	Yonne	26
Gers	8	Nièvre	16		
	520		777		1927

Saint-Domingue	18	21	53
La Guadeloupe	3		
Nés en pays étrangers, mais Français d'origine.	32		
TOTAL			1980

…ITE *au Tableau inséré au N°. 4 (pag. 228), présentant …résultat des concours d'admission, depuis l'établissement …e l'École.*

…NNÉES des …COURS.	NOMBRE DES CANDIDATS EXAMINÉS		TOTAL des candidats examinés.	ÉLÈVES ADMIS A L'ÉCOLE		TOTAL des élèves admis.
	dans les départem^s.	à Paris.		parmi les candidats examinés dans les départem^s.	parmi les candidats examinés à Paris.	
…ésultat …orté au …Tabl.	1869	1743	3612	759	778	1537
…An 14	190	103	293	74	51	125
…1806.	182	102	284	108	66	174
…1807.	185	128	313	86	58	144
	2426	2076	4502	1027	953	1980

…nombre total des candidats, comparé à celui des …lèves admis, est comme. . . . . 1000 est à 439.

…nombre des candidats examinés dans les départemens, …st à celui des admis, comme . . . . 1000 est à 423.

…nombre des candidats examinés à Paris, est à celui …des admis, comme . . . . 1000 est à 459.

…nombre des candidats examinés dans les départemens, …st, à celui des examinés à Paris, comme . . . . . 1000 est à 855.

TABLEAU des instituteurs chargés de l'enseignement de l'Ecole Polytechnique dans l'année scholaire de 1807 *à* 1808.

MM.

Lacroix. . . . . . Labey.	Cours d'analyse.
Monge. . . . . . Hachette.	Cours de géométrie descriptive. Cours d'analyse appliquée à la géométrie. Cours élémentaire des machines.
Prony . . . . . . Poisson.	Cours de mécanique.
Hassenfratz. . . .	Cours de physique.
Guyton. . . . . . Fourcroy.	Cours de chimie générale et appliquée aux Arts.
Sganzin. . . . . . Duhays.	Cours de constructions publiques. Cours d'art militaire. Cours de topographie.
Durand.	Cours d'architecture.
Neveu.	Dessin de la figure et du paysage.
Andrieux.	Cours de grammaire et belles-lettres.

RÉPÉTITEURS.

Ampère. . . . . . Reynaud.	Analyse et mécanique.
Binet.	Géométrie descriptive et analyse appliquée à la géométrie.
Gay-Lussac. . . . Drappier.	Chimie.
Merimée. . . . . . Lemire (frères) . .	Dessin de la figure et du paysage.
Clerc.	Dessin de la carte. (*Chef de topographie.*)

Girard, Gauché, Delaunay, ... *dessinateurs.*

TABLE

Des matières contenues dans le premier volume de la *Correspondance* sur l'Ecole Polytechnique.

Ce volume est composé de dix numéros qui ont paru à différentes époques, depuis le mois d'avril 1804 *jusqu'au même mois de l'an* 1808. Douze planches, dessinées par M. *Girard*, sont jointes à ce volume.

N°. 1er. *Germinal an* 12 (*Avril* 1804).

§. Ier.

§. II.

§. III.

---

(1) Voyez le 14e. cahier in-4°. du Journal de l'Ec. Polytechn. pag. 130.

§. IV.

N°. 2. *Fructidor an* 12 (*Septembre* 1804).

§. Ier.

§. II.

---

(1) Le 4e. numéro (pag. 93—127) contient l'état nominatif des élèves admis à l'Ecole Polytechnique et dans les services publics depuis la création de l'Ecole (mars 1795, voyez pag. 327) jusqu'au 1er. frimaire an 11 (décembre 1802).

No. 3. *Pluviose an* 13 (*Février* 1805).

N°. 4. *Messidor an* 13 (*juillet* 1805).

N°. 5. *Frimaire an* 14 (*décembre* 1805).

N°. 6. (*Juillet* 1806).

§. Ier.

N°. 7. *Janvier* 1807.

§. II.

§. III.

§. IV.

N°. 8. *Mai* 1807.

§. II.

§. III et IV.

§. V.

N°. 9. *Janvier* 1808.

§. I et II.

§. III.

§. IV.

§. V.

N°. 10. *Avril* 1809.

§. Ier.

§. II.

§. III.

§. IV.

§. V.

FIN.

Avis au Relieur.

On placera chaque Planche à la suite du [illegible] elle fait partie.